Universidade do Minho

UM CONTRIBUTO DA TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES PARA O CÁLCULO ANALÍTICO

Dissertação submetida à Escola de Ciências da Universidade do Minho para obtenção do grau de Mestre em Matemática - Especialização em Ensino

Trabalho realizado sob a orientação do
Professor Doutor Filipe Oliveira

Filipe Manuel Sampaio de Carvalho
2005

Agradecimentos

À minha família, pela esperança que sempre depositou em mim e no meu futuro.

Ao meu orientador, Professor Doutor Filipe Oliveira pela disponibilidade e paciência, mas principalmente pelo desafio que imprimiu a cada etapa deste estudo.

Por último, não poderia deixar de agradecer aos meus colegas da ESCE, Escola Superior de Ciências Empresariais de Valença, pela amizade e pelo incentivo constante.

À minha esposa Filipa

Resumo

A teoria das distribuições foi formulada pelo francês Laurent Schwartz durante a segunda guerra mundial. Validando a utilização da diferenciação e da análise de Fourier em situações completamente inacessíveis ao cálculo diferencial clássico de Leibniz e Newton, esta teoria veio fornecer um quadro teórico rigoroso a algumas generalizações intuicionistas da análise, efectuadas em finais do século XIX por Heaviside e Dirac.

A importância inquestionável da teoria das distribuições na evolução da matemática contemporânea valeu a Laurent Schwartz uma medalha Fields em 1950.

Nesta monografia pretende-se efectuar uma introdução à teoria das distribuições e apresentar alguns dos contributos para o cálculo analítico, nomeadamente no que diz respeito à generalização do conceito de derivada e à resolução de equações de derivadas parciais.

Abstract

The theory of distributions was presented by Laurent Schwartz during the Second World War. Allowing differentiation and Fourier transform in situations where Leibniz's e Newton's calculus did not apply, this theory provided rigorous theoretical support to some generalizations, based only in intuition, made by Heaviside and Dirac in the nineteenth century.

In 1950, Schwartz won a Fields medal in recognition of the utmost importance of his work.

In this study, we will make an introduction of the theory of distributions and present some of its applications in calculus, namely on the generalization of differentiation and partial differential equations.

Sumário

Introdução **1**

1 Espaços vectoriais topológicos **3**

1.1 Definições e primeiros resultados 3

1.2 Espaços vectoriais topológicos de dimensão finita 15

1.3 Seminormas 19

2 Distribuições **25**

2.1 Os espaços $C^\infty(\Omega)$ e D_K 25

2.2 Os espaços $D(\Omega)$ e $D'(\Omega)$ 31

3 Diferenciação **34**

3.1 Alguns exemplos de distribuições 34

3.2 Derivada de uma distribuição 41

4 Equações de Derivadas Parciais **47**

4.1 Produto de convolução 48

4.2 Transformada de Fourier 52

4.3 Os operadores diferenciais clássicos 60

Referências Bibliográficas **69**

Introdução

Em 1950, Laurent Schwartz publicou a obra de reconhecido mérito *La théorie des distributions* [11] que lhe valeu, no Congresso Internacional de Matemática de Harvard, uma medalha Fields. Esta teoria permitiu a diferenciação e a análise de Fourier onde o cálculo diferencial clássico de Leibniz e Newton não podia ser utilizado. Criando um cálculo baseado na extensão da classe das funções a uma nova classe de objectos, as distribuições, Schwartz sistematizou e clarificou algumas generalizações intuicionistas da análise desenvolvidas, em finais do século XIX, por Heaviside e Dirac.

Muito se poderia dizer sobre o primeiro matemático francês a ser homenagiado com uma medalha Fields. Com a teoria das distribuições conquistou um lugar privilegiado entre os matemáticos do século XX mas a sua contribuição para o desenvolvimento da matemática foi mais longe. Schwartz dedicou-se ainda a áreas como a análise funcional, a teoria da medida, as equações diferenciais parciais e a teoria das probabilidades. Alguns resultados nestas áreas foram publicados sob o pseudónimo de Nicolas Bourbaki, por trás do qual se escondia um grupo de matemáticos de renome, entre os quais se contava Schwartz, André Weil e Jean Dieudonné. A importância da obra matemática deste grupo é bem patente nas quatro medalhas Fields que, desde 1950, Bourbaki arrecadou.

Além de se notabilizar pela sua excelência científica, não se pode deixar de referir que Schwartz se destacou ainda pelo seu talento pedagógico e pela beleza das suas exposições, pela defesa da investigação científica e da qualidade do ensino superior. Longe do estereótipo do investigador alheado e distraído, Schwartz foi ainda um homem preocupado com os problemas sociais do seu tempo, um defensor fervoroso dos direitos do Homem. Para aprofundar a vida e a obra de Laurent Schwartz recomenda-se a sua autobiografia [15].

O presente trabalho pretende ser uma introdução à teoria das distribuições de Schwartz. Apresentar-se-ão ainda alguns dos contributos desta para o cálculo analítico, como seja na generalização do conceito de derivada e na resolução de equações de derivadas parciais.

O trabalho está organizado do seguinte modo:

No primeiro capítulo introduzem-se algumas notações, definições e resultados básicos relacionados com os espaços vectoriais topológicos em geral. Seguidamente apresentam-se alguns resultados relacionados com espaços vectoriais topológicos de dimensão finita. Uma vez que o espaço das distribuições, à imagem dos espaços funcionais em geral, não tem dimensão finita, termina-se este capítulo com a descrição de famílias de seminormas e da forma como estas podem ser utilizadas na caracterização de quaisquer espaços vectoriais topológicos localmente convexos.

No início do capítulo 2 apresentam-se alguns espaços vectoriais topológicos que estão relacionados com o espaço das distribuições. Seguidamente define-se o espaço das distribuições, concluindo assim a primeira etapa deste trabalho.

O terceiro capítulo é dedicado á generalização do conceito de derivada. Na primeira secção apresentam-se alguns exemplos de distribuições e mostra-se que o espaço destas é bem mais abrangente que o espaço das funções diferenciáveis. Na segunda secção define-se o conceito de derivada de uma distribuição e mostra-se que este, não contradizendo o conceito clássico, generaliza a diferenciação a muitos outros objectos matemáticos.

O produto de convolução e a transformada de Fourier são duas ferramentas matemáticas muito úteis na resolução de equações diferenciais. As duas primeiras secções do quarto e último capítulo são dedicadas ao estudo de algumas propriedades destas ferramentas no contexto das distribuições. Dedica-se a última secção às equações de derivadas parciais e estuda-se, em particular, exemplos dos três tipos de operadores clássicos: elíptico, parabólico e hiperbólico.

Capítulo 1

Espaços vectoriais topológicos

1.1 Definições e primeiros resultados

Sejam S um conjunto e τ uma colecção de subconjuntos de S. Diz-se que (S, τ) é um *espaço topológico* e τ uma *topologia* de S se:

(i) $S \in \tau$ e $\emptyset \in \tau$;

(ii) $A \cap B \in \tau$ para todos os $A, B \in \tau$;

(iii) Para toda a família de índices I,

$$\forall i \in I, \quad A_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau.$$

Seja $A \subset S$. Diz-se que A é um *aberto de* S se $A \in \tau$. Ao complementar de A, que se denotará A^c, chama-se *fechado de* S.

Sejam (S, τ) um espaço topológico e $a \in S$. Diz-se que V é uma *vizinhança de* a se $V \in \tau$ e $a \in V$.

Sejam (S, τ) um espaço topológico e $A \subset S$.

- O *interior de* A é o maior aberto contido em A.

Verifica-se facilmente que

$$\dot{A} = \bigcup_{O \in \tau,\ O \subset A} O.$$

Note-se que, se $A \subset S$ é aberto então $\dot{A} = A$.

- A *aderência de* A, que se representa por $\overline{A}$, é o menor fechado que contém A.

  Verifica-se facilmente que

  $$\overline{A} = \bigcap_{F^c \in \tau \, e \, A \subset F} F.$$

  Note-se que, se $A \subset S$ é fechado, então $\overline{A} = A$.

Uma *cobertura aberta de* A é um conjunto $\beta \subset \tau$ tal que

$$A \subset \bigcup_{O \in \beta} O.$$

Uma *subcobertura de* β é um subconjunto de β que seja ainda uma cobertura de A.

Se toda a cobertura de A contém uma subcobertura finita diz-se que A é um *compacto*.

Considerem-se agora aplicações entre espaços topológicos.

Sejam (S, τ) e (G, τ') dois espaços topológicos. Uma aplicação $f : S \to G$ diz-se *contínua em* $a \in S$ se a imagem recíproca de toda vizinhança de $f(a)$ contém uma vizinhança de a.

Uma aplicação f que é contínua em todos os pontos de S diz-se *contínua em* S. Ou, de forma equivalente, uma aplicação $f : S \to G$ é contínua no seu domínio se e só se a imagem recíproca de todo aberto de G é um aberto de S.

Ao longo deste trabalho $\mathbb{K}$ representará o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, munido da topologia usual.

Antes de se apresentar a noção de espaço vectorial topológico convém definir o que se entende por topologia produto.

Dados dois espaços topológicos (S, τ) e (G, τ') a *topologia produto* definida em $S \times G$ é a menor topologia tal que as aplicações $\pi_1 : S \times S' \to S$ e $\pi_2 : S \times G \to G$ definidas respectivamente por $\pi_1(x, y) = x$ e $\pi_2(x, y) = y$ são contínuas. Pode-se ainda definir esta topologia de uma outra forma, como se apresenta no seguinte lema.

Lema 1.1
Sejam (S, τ) e (G, τ') dois espaços topológicos. A topologia produto definida no espaço vectorial $S \times G$ é a topologia que se obtém do produto tensorial entre as topologias τ e τ', isto é,

$$\tau \otimes \tau' = \{\cup(A \times A') \,|\, A \in \tau \wedge A' \in \tau'\}.$$

Definição 1.2 (espaço vectorial topológico)
Seja $(X, +, .)$ um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. A (X, τ) chama-se espaço vectorial topológico se a topologia τ é tal que

(i) todo o subconjunto elementar de X é fechado;

(ii) as operações $+$ e $\cdot$ do espaço vectorial são contínuas para a topologia τ, onde os produtos cartesianos $X \times X$ e $\mathbb{K} \times X$ são munidos da topologia produto.

Quando tal não der origem a ambiguidade, diz-se simplesmente que X é um espaço vectorial topológico.

Sejam (X, τ) um espaço vectorial topológico, $a \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. As operações *translação de vector* a e *homotetia centrada em* 0 *de razão* λ representadas, respectivamente, por T_a e M_λ são definidas, para todo o $x \in X$, por

$$\begin{aligned} T_a(x) &= a + x \\ M_\lambda(x) &= \lambda x. \end{aligned}$$

Verifica-se que estas operações são homeomorfismos de X em X. De facto, $T_{-a} = {T_a}^{-1}$ e $M_{\lambda^{-1}} = {M_\lambda}^{-1}$. Além disso, estas funções são contínuas por definição.

Em particular, uma topologia num espaço vectorial (X, τ) é invariante por translação, ou seja,

$$\forall a \in X \ , \ \tau = T_a(\tau).$$

Desta forma, basta conhecer todas as vizinhanças de um ponto para, por translação, se conhecerem todas as vizinhanças de um outro ponto qualquer. Assim, a topologia fica bem definida pelo conjunto de todas as vizinhanças de um elemento de X. Neste trabalho vai considerar-se o elemento $0 \in X$ e designar-se por $\mathcal{V}_0$ o conjunto de todas as vizinhanças da origem.

Sejam (X, τ) um espaço vectorial topológico e $\beta \subset \mathcal{V}_0$. Diz-se que β é uma *base local* de (X, τ) se todo o $V \in \mathcal{V}_0$ contém um elemento de β.

Os abertos não vazios de X são os conjuntos que se obtêm por união e translação de elementos de β.

Num espaço vectorial topológico a aderência de um conjunto pode ser definida de outra forma.

Sejam (S, τ) um espaço vectorial topológico e $A \subset S$. A *aderência de* A é o conjunto

$$\bigcap_{V \in \mathcal{V}_0} (A + V),$$

onde $\mathcal{V}_0$ representa o conjunto de todas as vizinhanças de 0.

Prova-se, em seguida, que as duas definições são equivalentes.

Sejam $x \in \overline{A}$ e $V \in \mathcal{V}_0$. Suponha-se que $(x + V) \cap A = \emptyset$. O conjunto $(x + V)^c$ é fechado e $A \subset (x + V)^c$. Nestas condições $\overline{A} \subset (x + V)^c$, o que é absurdo pois $x \in (x + V)$ e $x \in \overline{A} \subset (x + V)^c$. Desta forma

$$\bigcap_{F^c \in \tau e A \subset F} F \subset \bigcap_{V \in \mathcal{V}_0} (A + V) .$$

Reciprocamente seja $x \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}_0} (A + V)$. Pode verificar-se que $(x+V) \cap A \neq \emptyset$ se e só se $x \in A - V$. Mais ainda, se $-V \in \mathcal{V}_0$ então $V \in \mathcal{V}_0$. Logo $(x + V) \cap A \neq \emptyset$ para todo o $V \in \mathcal{V}_0$. Seja F um conjunto fechado tal que

$A \subset F$. Se $x \notin F$ então $x \in F^c$. Como F^c é um aberto tem-se que $F^c = x + V_F$ para algum $V_F \in \mathcal{V}_0$. Desta forma $(x + V_F) \cap A = \emptyset$ o que é absurdo. Portanto

$$\bigcap_{v \in \mathcal{V}_0} (A + V) \subset \bigcap_{F^c \in \tau e A \subset F} F.$$

Em seguida, definem-se outros conceitos que serão úteis ao longo deste trabalho.

Seja (X, τ) um espaço vectorial topológico.

- Um conjunto $A \subset X$ diz-se *convexo* se, dados dois elementos $x, y \in A$, o elemento $(1-t)x + ty \in A$ para todo o $0 \leq t \leq 1$.

  Se X tem uma base local cujos elementos são convexos diz-se que X é *localmente convexo*.

- Um conjunto $A \subset X$ diz-se *equilibrado* se

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \ , \ |\alpha| < 1 \Rightarrow \ \alpha A \subset A.$$

- Um conjunto $A \subset X$ diz-se *limitado* se para todo o $V \in \mathcal{V}_0$

$$\exists r > 0 \,|\, t > r \Rightarrow A \subset tV.$$

  Quando a origem possui uma vizinhança limitada diz-se que X é *localmente limitado*.

- Um conjunto $A \subset X$ diz-se *absorvente* se

$$\forall x \in X, \ \exists t \in \mathbb{R} \,|\, \forall\, s > t, \ x \in sA.$$

- Se existe uma vizinhança V de 0 em X cuja aderência é um conjunto compacto diz-se que X é *localmente compacto*.

A proposição que se segue permite afirmar que toda a base local de um dado espaço vectorial topológico contém uma base local equilibrada pelo que todo o espaço vectorial topológico tem uma base local equilibrada.

Proposição 1.3
Seja (X, τ) um espaço vectorial topológico. Se $W \in \mathcal{V}_0$, então existe uma vizinhança equilibrada $V \in \mathcal{V}_0$ tal que $V \subset W$.

Prova:
Sejam (X, τ) um espaço vectorial topológico e $W \in \mathcal{V}_0$. Como o produto de um elemento de X por um escalar é contínuo, o conjunto $W^{-1} = \{(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X \mid \lambda x \in W\}$ é aberto de $\mathbb{K} \times X$. Além disso $0.0 = 0$, pelo que W^{-1} é uma vizinhança de $(0, 0)$.

Pelo Lema 1.1
$$W^{-1} = \bigcup_{i \in I} V_i$$
onde os abertos V_i são da forma $A \times B$, com $A \in \tau$ e $B \in \tau$ para todo $i \in I$.

Como $(0, 0) \in W^{-1}$, $(0, 0) \in V_i$ para algum $i \in I$. Seja $V_j = A \times B$ esse conjunto.

Logo, existem dois abertos $A \subset \mathbb{K}$ e $B \subset X$ tais que $AB \subset W$, $0_{\mathbb{K}} \in A$ e $0_X \in B$. Assim, existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que
$$\forall \alpha \in \mathbb{K},\ |\alpha| < \delta \Rightarrow\ \alpha B \subset W.$$
Se
$$V = \bigcup_{|\alpha| < \delta} \alpha B$$
então $V \in \mathcal{V}_0$ é uma vizinhança equilibrada contida em W. □

As aplicações lineares desempenham, neste trabalho, um papel de destaque, pelo que se torna indispensável apresentar algumas das suas propriedades. As que se enunciam na seguinte proposição são de demonstração simples, baseada na definição de aplicação linear.

Proposição 1.4
Sejam X e Y espaços vectoriais reais. Consideremos os conjuntos A e B tais que $A \subset X$, $B \subset Y$ e a aplicação linear $\phi : X \to Y$.

1. *Se A é um conjunto convexo (equilibrado) ou subespaço vectorial localmente convexo (equilibrado) então $\phi(A)$ também o é;*

2. *Se B é um conjunto convexo (equilibrado) ou subespaço vectorial localmente convexo (equilibrado) então $\phi^{-1}(B)$ também o é.*

A seguinte proposição permite, sob determinadas condições, provar a continuidade de uma forma linear através da existência de uma vizinhança $V \in \mathcal{V}_0$ na qual essa aplicação seja limitada.

Proposição 1.5
Sejam (X, τ) um espaço vectorial topológico e $\phi : X \to \mathbb{K}$ uma aplicação linear, tal que, $\phi(x) \neq 0$ para algum $x \in X$. As proposições seguintes são equivalentes:

1. *ϕ é contínua;*
2. *$Ker(\phi)$ é um subespaço fechado;*
3. *$Ker(\phi)$ não é denso em X;*
4. *ϕ é limitada em alguma vizinhança de 0.*

Prova:
1) $\Rightarrow$ 2) $Ker(\phi) = \phi^{-1}(0)$ e $\{0\}$ é um subespaço fechado pelo que, como ϕ é linear e contínua, $Ker(\phi)$ também é um subespaço fechado.

2) $\Rightarrow$ 3) Como $Ker(\phi)$ é um subespaço fechado e $Ker(\phi) \neq X$, por hipótese, tem-se que $Ker(\phi)$ não é denso em X.

3) $\Rightarrow$ 4) Como $Ker(\phi)$ não é denso em X, o seu complementar tem interior não vazio. Existe portanto uma vizinhança equilibrada V de 0 e um elemento $x \in X$ tais que $(x + V) \cap Ker(\phi) = \emptyset$.

Se $\phi(V)$ é limitada fica provada a implicação.
Suponha-se então que $\phi(V)$ não é limitada:
existe $\tilde{x} \in V$ tal que $|\phi(\tilde{x})| \geq |\phi(x)|$. Logo existe α de módulo inferior a 1 com $\alpha\phi(\tilde{x}) = -\phi(x)$. Como ϕ é linear $\alpha\phi(\tilde{x}) = \phi(\alpha\tilde{x})$. Como V é equilibrado, $\alpha\tilde{x} \in V$. Desta forma existe $y \in V$ tal que $\phi(y) = -\phi(x)$ e portanto $(x + y) \in Ker(\phi)$, o que é absurdo pois $(x + V) \cap Ker(\phi) = \emptyset$.

4) $\Rightarrow$ 1) Como ϕ é limitada em $V \in \mathcal{V}_0$ tem-se que

$$\exists\, M < \infty\ \forall\, x \in V,\ |\phi(x)| < M.$$

Se $\epsilon > 0$ e $W = \frac{\epsilon}{M}V$, então para todo o $x \in W$ tem-se $|\phi(x)| < \epsilon$. Logo, sendo B_ϵ a bola centrada em 0 e raio ϵ de $\mathbb{K}$, $\phi^{-1}(B_\epsilon) \supset W$. Assim, ϕ é contínua na origem e, por conseguinte, contínua. $\square$

Sejam X um espaço vectorial, $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Chama-se *norma* sobre X a uma aplicação $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ que verifica

- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
- se $\|x\| > 0$ então $x \neq 0$.

Se X é um conjunto não vazio, dizemos que a aplicação $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ é uma *métrica* sobre X se, para quaisquer $x, y, z \in X$:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, x)$;

Ao par (X, d) chamamos *espaço métrico.*

Sejam X um espaço vectorial e $\|.\|$ uma norma sobre X. A aplicação $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por $d(x, y) = \|y - x\|$ para todos os $x, y \in X$ é uma métrica e diz-se que *d é a métrica induzida pela norma* $\|.\|$.

Seja (X, d) um espaço métrico. O conjunto $B(a, \epsilon) = \{x \in X \mid d(x, a) < \epsilon\}$ designa-se por *bola centrada em a de raio ϵ.*

Verifica-se facilmente que a colecção τ_d de subconjuntos de X definida por

$$\tau_d = \{A \subset X \mid \forall\, a \in A\ \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ \,:\, B(a, \epsilon) \subset A\}$$

é uma topologia. A topologia assim definida designa-se por *topologia induzida pela métrica d.*

Quando o espaço topológico (X, τ) é tal que a topologia τ pode ser induzida por uma métrica d diz-se que (X, τ) é *metrizável*. Se, além disso, d é uma métrica induzida por uma norma $\|.\|$ então, (X, τ) diz-se *normável*.

Nem todos os espaços vectoriais topológicos são normáveis, como se verá ainda neste capítulo.

Os espaços vectoriais que se apresentam em seguida, desempenharão um papel importante no trabalho que se desenvolverá ao longo desta dissertação.

Definição 1.6 (espaço de Hausdorff)
Sejam (X, τ) um espaço vectorial topológico. (X, τ) é de Hausdorff se, dados quaisquer dois elementos $a, b \in X$, existem dois abertos A e B tais que:

(i) $a \in A$ *e* $b \in B$;

(ii) $A \cap B = \emptyset$.

Definição 1.7 (espaço de Heine-Borel)
Seja (X, τ) um espaço vectorial topológico. (X, τ) diz-se de Heine-Borel, se possuir a propriedade de Heine-Borel, ou seja, se todo o subconjunto de X fechado e limitado é compacto.

Definição 1.8 (espaço completo)
Sejam (X, τ) um espaço vectorial topológico e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ uma sucessão. Diz-se que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy se, para todo o $V \in \mathcal{V}_0$, existe uma ordem N_V tal que

$$i \geq N_V, j \geq N_V \Rightarrow (x_i - x_j) \in V.$$

Diz-se que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente, de limite $x \in X$ se, para todo o $V \in \mathcal{V}_0$, existe uma ordem N_V tal que

$$n \geq N_V \Rightarrow (x_n - x) \in V.$$

O espaço (X, τ) diz-se espaço completo se as sucessões de Cauchy forem exactamente as sucessões convergentes.

O seguinte lema será bastante útil na demonstração de algumas proposições. Entende-se por *vizinhança simétrica* uma vizinhança U tal que $U = -U$.

Lema 1.9
Seja X um espaço vectorial topológico. Se $W \in \mathcal{V}_0$, então existe uma vizinhança simétrica U tal que $U + U \subset W$.

Prova:
Sejam (X, τ) um espaço vectorial topológico e $W \in \mathcal{V}_0$. Como a adição de elementos de X é contínua, o conjunto $W^{-1} = \{(x, y) \in X \mid x + y \in W\}$ é um aberto. Além disso, $0 + 0 = 0$, pelo que, W^{-1} é uma vizinhança de $(0, 0)$.

Por um processo análogo ao utilizado na prova da proposição 1.3 tem-se que existem $A, B \in \mathcal{V}_0$ tais que $A + B \subset W$. Considerando

$$U = A \cap B \cap (-A) \cap (-B)$$

tem-se que $U \in \mathcal{V}_0$ é uma vizinhança simétrica e $U + U \subset A + B \subset W$. $\square$

Pode aplicar-se este lema de forma recursiva e afirmar que, dado $W \in \mathcal{V}_0$, existe uma vizinhança simétrica $V \in \mathcal{V}_0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} V \subset W.$$

O seguinte lema será útil na demonstração da proposição que se segue.

Lema 1.10
Sejam K e C dois subconjuntos de um espaço vectorial topológico (X, τ) tais que, C é fechado, K é compacto e $K \cap C = \emptyset$. Então existe $V \in \mathcal{V}_0$ tal que

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset.$$

Prova:
Se $K = \emptyset$, então $K + V = \emptyset$ pelo que $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$.

Suponha-se agora que $K \neq \emptyset$. Seja $x \in K$. Como C é fechado, C^c é aberto. Além disso, $K \cap C = \emptyset$ pelo que $x \in K \subset C^c$. Pela Lema 1.9, visto que C^c é uma vizinhança de x, existe uma vizinhança simétrica $V \in \mathcal{V}_0$ tal que

$$x + V + V + V \subset C^c \tag{1.1}$$

Suponha-se, por redução ao absurdo, que $(x+V+V)\cap(C+V)\neq\emptyset$. Neste caso, existiriam $v_1, v_2, v_3 \in V$ e $c \in C$ com $x+v_1+v_2 = c+v_3$ ou ainda $x+v_1+v_2-v_3 = c \in C$, o que contradiz (1.1) uma vez que V é simétrico donde $-v_3 \in V$. Logo

$$(x+V+V)\cap(C+V)=\emptyset.$$

Como K é compacto, qualquer cobertura de K admite uma subcobertura finita. Assim, atendendo ao que foi dito anteriormente, existe um número finito de pontos $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ e de vizinhanças $V_1, V_2, ..., V_n \in \mathcal{V}_0$ tais que

$$K \subset (x_1+V_1)\cup(x_2+V_2)\cup ...\cup(x_n+V_n)$$

e, para todo o $i \in \{1,2,...,n\}$,

$$(x_i+V_i+V_i)\cap(C+V_i)=\emptyset.$$

Seja $V = V_1 \cap V_2 \cap ... \cap V_n$. Tem-se que

$$K+V \subset \bigcup_{n=1}^{n}(x_i+V_i+V) \subset \bigcup_{n=1}^{n}(x_i+V_i+V_i).$$

Como para todo $i=1,2,...,n$, $(x_i+V_i+V_i)\cap(C+V_i)=\emptyset$ e $C+V_i \supset C+V$, vem que $(K+V)\cap(C+V)=\emptyset$. $\square$

Como $C+V$ é aberto, o fecho de $K+V$ não intersecta $C+V$. Desta forma, tomando $K=\{0\}$, facilmente se conclui que todo o $V \in \mathcal{V}_0$ contém a aderência de algum $W \in \mathcal{V}_0$.

Proposição 1.11

Todos os espaços vectoriais topológicos são de Hausdorff.

Prova:

Sejam X um espaço vectorial topológico e $x, y \in X$. O conjunto $\{x\}$ é fechado por definição e $\{y\}$ é claramente compacto. Basta pois aplicar o Lema 1.10 com $K=\{y\}$ e $C=\{x\}$. $\square$

Proposição 1.12

Sejam (X, τ) um espaço vectorial topológico real e $V \in \mathcal{V}_0$.

1. *Se a sequência $(r_n)_{n \in N} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = +\infty$, então*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V.$$

2. *Se a sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge para 0 e a vizinhança $V \in \mathcal{V}_0$ é limitada, então a colecção $\{t_n V \,|\, n = 1, 2, 3, ...\}$ é uma base local de (X, τ).*

Prova:

1. Sejam X um espaço vectorial topológico real e $x \in X$. Como a aplicação $f : \mathbb{R} \to X$ definida por $f(\alpha) = \alpha x$ é contínua, a imagem recíproca de V por f, V^{-1}, é um aberto e $0 \in V^{-1}$. Assim, $\frac{1}{r_n} \in V^{-1}$ para n suficientemente grande. Tem-se então que $\frac{x}{r_n} \in V$, ou seja, $x \in r_n V$ para n suficientemente grande.

2. Sejam $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e $V \in \mathcal{V}_0$ nas condições enunciadas. Para se provar que a colecção $\{t_n V \,|\, n = 1, 2, 3, ...\}$ é uma base local de (X, τ) basta mostrar que todo o $U \in \mathcal{V}_0$ tem um elemento desta colecção.

   Seja $U \in \mathcal{V}_0$. Como V é limitado existe $s > 0$ tal que $V \subset tU$ para todo o $t > s$. Como a sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0 tem-se que, a partir de uma certa ordem N, $s < \frac{1}{t_n}$. Assim, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $V \subset \frac{1}{t_m} U$, ou seja, $t_m V \subset U$. $\square$

Proposição 1.13

Seja (X, τ) um espaço vectorial topológico. Todo o subconjunto compacto K de X é limitado.

Prova:
Seja $V \in \mathcal{V}_0$ uma vizinhança equilibrada. Considere-se a colecção de abertos de X

$$\beta = \{nV \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Pelo ponto 1 da Proposição 1.12, β é uma cobertura de K. Como K é compacto, esta cobertura admite uma subcobertura finita, ou seja, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{s} nV.$$

Como V é equilibrado, a sucessão $(nV)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, pelo que

$$\bigcup_{n=1}^{s} nV = sV,$$

donde $K \subset sV$. Conclui-se que K é limitado. $\square$

1.2 Espaços vectoriais topológicos de dimensão finita

Entre os espaços vectoriais topológicos de dimensão finita encontra-se $\mathbb{R}^n$, munido da norma euclidiana. Podem-se definir outras normas em $\mathbb{R}^n$ que correspondem, obviamente, a diferentes métricas, no entanto, todas elas induzem o mesmo espaço vectorial topológico. Mais ainda, se (X, τ) é um espaço vectorial real topológico de dimensão finita n, então todo o isomorfismo de (X, τ) em $\mathbb{R}^n$, munido da norma euclidiana, é um homeomorfismo. Por outras palavras, pode dizer-se que a topologia induzida pela norma euclidiana é a única que um espaço vectorial real topológico de dimensão finita n pode ter.

De forma análoga, poder-se-ia afirmar que existe apenas um espaço vectorial topológico complexo com dimensão finita n. A proposição que se segue enuncia o que se acabou de afirmar.

Proposição 1.14
Se n é um inteiro positivo e Y é um subespaço vectorial topológico de dimensão

finita n de um espaço vectorial topológico X, real ou complexo, então todo o isomorfismo de $\mathbb{K}^n$ em Y é um homeomorfismo e Y é fechado em X.

Prova:
Seja $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow Y$ um isomorfismo. Sejam $(e_1, e_2, ..., e_n)$ a base canónica de $\mathbb{K}^n$ e $u_i = f(e_i)$ para todo o $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Como f é um isomorfismo, $(u_1, u_2, ..., u_n)$ constitui uma base de Y.

Seja $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{K}^n$. Tem-se que

$$f(z) = z_1 u_1 + z_2 u_2 + ... + z_n u_n.$$

Sejam $\pi_i(z) : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ as aplicações definidas por $\pi_i(z) = z_i$ para todo o $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Como estas aplicações são contínuas a continuidade de f obtém-se, de forma imediata, pelo facto da adição de vectores e da multiplicação por escalares serem contínuas.

Sejam S^{n-1} e B^n a esfera e bola unitárias de $\mathbb{K}^n$, respectivamente. Seja

$$K = f(S^{n-1}).$$

Uma vez que f é contínua sabe-se que K é compacto. Por outro lado, $f(0) = 0$ e f é injectiva donde $0 \notin K$. Assim, K e $\{0\}$ são dois subconjuntos de Y tais que $\{0\}$ é fechado, K é compacto e $\{0\} \cap K = \emptyset$. Pelo Lema 1.10, existe, em Y, uma vizinhança $V \in \mathcal{V}_0$ tal que

$$(\{0\} + V) \cap (K + V) = \emptyset.$$

Como $\{0\} + V = V$ e $K \subset (K + V)$ pois $0 \in V$, pode dizer-se que

$$V \cap K = \emptyset.$$

Seja $E = f^{-1}(V)$. Ten-se que $0 \in E$ e $E \cap S^{n-1} = \emptyset$ donde $E \subset B^n$ e, consequentemente, E é limitado. Logo pela proposição 1.5 f^{-1} é contínua. Conclui-se assim que f é um homeomorfismo.

Para provar que Y é fechado, considerem-se $p \in \overline{Y}$, fe V definidos como anteriormente. Seja U' um aberto de X tal que $U' \cap Y = U$. Considere-se ainda $t > 0$ de tal forma que $p \in tU'$.

Tem-se que

$$p \in \overline{Y \cap (tU')} \subset \overline{f(tB^n)} \subset \overline{f(t\overline{B^n})}.$$

Como $f(t\overline{B^n})$é compacto então é fechado em X. Assim, $p \in f(t\overline{B^n}) \subset Y$, o que prova que $Y = \overline{Y}$. □

A proposição anterior não se aplica nos casos em que o espaço vectorial topológico Y tem dimensão infinita. Aliás, existem espaços vectoriais topológicos com dimensão infinita que não são sequer normáveis, como se verá de seguida.

Proposição 1.15
Todo o espaço vectorial topológico localmente compacto tem dimensão finita.

Prova:
Seja $V \in \mathcal{V}_0$ tal que $\overline{V}$ é compacto. Sabe-se que V é limitado e, pelo ponto 2 da Proposição 1.12, os conjuntos $2^{-n}V$, com $n \in \mathbb{N}$, formam uma base local de X. Como $\overline{V}$ é compacto, existem elementos $x_1, x_2, ..., x_n$ de X tais que

$$\overline{V} \subset (x_1 + \frac{1}{2}V) \cup ... \cup (x_n + \frac{1}{2}V).$$

Seja Y o espaço vectorial gerado por $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Tem-se que $dim(Y) \leq n$ e, pela Proposição 1.14, Y é um subespaço fechado de X. Como $V \subset Y + \frac{1}{2}V$ e $\lambda Y = Y$ para todo o escalar $\lambda \neq 0$, segue-se que $\frac{1}{2}V \subset Y + \frac{1}{4}V$. Assim,

$$V \subset \overline{V} \subset Y + \frac{1}{2}V \subset Y + Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V.$$

Continuando este processo obtém-se

$$V \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (Y + 2^{-n}V).$$

Como $\{2^{-n}V \mid n \in \mathbb{N}\}$ é uma base local segue-se que $V \subset \overline{Y}$ e, como Y é fechado, $V \subset Y$. Assim, $kV \subset Y$, para todo o $k \in \mathbb{N}$. Logo, pelo ponto 1 da Proposição 1.12, $Y = X$ e, consequentemente, $dimX \leq n$. □

Proposição 1.16
Se X é um espaço vectorial topológico localmente limitado com a propriedade de Heine-Borel então X tem dimensão finita.

Prova:
Seja $V \in \mathcal{V}_0$ uma vizinhança limitada em X. Existe uma vizinhança $W \in \mathcal{V}_0$ tal que $\overline{W} \subset V$. A aderência $\overline{W}$ é também limitada donde, pela propriedade de Heine-Borel, $\overline{W}$ é compacto. Desta forma, X é localmente compacto e portanto, pela Proposição 1.15, tem dimensão finita. $\square$

Recorde-se que a *função de Minkowski* de um dado conjunto A é definida, para todo o $x \in X$, por

$$\mu_A(x) = inf\{t > 0 \mid t^{-1}x \in A\},$$

sempre que exista um escalar $t > 0$ tal que $t^{-1}x \in A$. Caso não exista um escalar $t > 0$ tal que $t^{-1}x \in A$ então $\mu_A(x) = +\infty$.

Proposição 1.17
Um espaço vectorial topológico (X, τ) é normável se e só se existe uma vizinhança $V \in \mathcal{V}_0$ convexa e limitada.

Prova:
Se X é normável e $\|.\|$ é uma norma compatível com a topologia τ então $\{x \in X : \|x\| < 1\} \in \mathcal{V}_0$ é uma vizinhança convexa e limitada.

Reciprocamente, seja $V \in \mathcal{V}_0$ uma vizinhança convexa e limitada. Defina-se, para todo o $x \in X$,

$$\|x\| = \mu_V(x). \tag{1.2}$$

Vamos provar que se trata, de facto, de uma norma:

- Como V é limitado, pelo ponto 2 da Proposição 1.12, os conjuntos rV, $r > 0$ formam uma base local do espaço topológico (X, τ). Como todos os espaços vectoriais topológicos são de Hausdorff, se $x \neq 0$, então $x \notin rV$, para algum $r > 0$ donde $\|x\| \geq r$. Conclui-se que, para todo o $x \in X \setminus \{0\}$, $\|x\| \geq r$.

- Sejam $x, y \in X$ e $\epsilon > 0$ um escalar. Considerem-se $t = \mu_V(x) + \epsilon$ e $s = \mu_V(y) + \epsilon$. Tem-se que $\frac{x}{t} \in V$ e $\frac{y}{s} \in V$. Como V é convexo sabe-se que:
$$\frac{x+y}{s+t} = \frac{t}{s+t} \times \frac{x}{t} + \frac{s}{s+t} \times \frac{y}{s} \in V.$$
Segue-se que $\mu_V(x+y) \leq s+t = \mu_V(x) + \mu_V(y) + 2\epsilon$ e, como ϵ é qualquer, vem que
$$\mu_V(x+y) \leq \mu_V(x) + \mu_V(y).$$

- Sejam $x \in X$ e $\alpha > 0$ um escalar. Se $v = \mu_V(x)$, então v é o ínfimo do conjunto $\{t > 0 \mid t^{-1}x \in V\}$ logo αv é o ínfimo do conjunto $\{t > 0 \mid t^{-1}\alpha x \in V\}$, ou seja,
$$\mu_V(\alpha x) = \alpha \mu_V(x).$$

Conclui-se que (4.1) define uma norma em X.

Pela definição de (4.1) e pelo facto de U ser aberto tem-se que, para todo o $r > 0$
$$\{x : \|x\| < r\} = rU.$$

A norma assim definida é compatível com a topologia de X. □

Através dos teoremas anteriores facilmente se conclui que não existem espaços vectoriais topológicos de dimensão infinita com a propriedade de Heine-Borel que sejam normáveis. Repare-se que se um espaço vectorial topológico X tem dimensão infinita e a propriedade de Heine-Borel, então não pode ser localmente limitado, pelo que não existe uma vizinhança convexa e limitada de 0 e, consequentemente, X não é normável. É pois necessário encontrar uma forma alternativa para caracterizar a sua topologia.

1.3 Seminormas

Esta secção é dedicada ao estudo de algumas propriedades de famílias de seminormas. Estudar-se-á ainda a sua aplicação na caracterização de quaisquer espaços vectoriais topológicos localmente convexos.

Relembre-se que uma *seminorma* num espaço vectorial X é uma função $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todos os $x, y \in X$ e todo o escalar α:

(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$;

(ii) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

Uma família $\mathcal{P}$ de seminormas diz-se *separável* se

$$\forall x \neq 0,\ \exists\, p \in \mathcal{P} : p(x) \neq 0.$$

De seguida, apresentam-se algumas propriedades das seminormas.

Proposição 1.18
Se p é uma seminorma num espaço vectorial X então:

1. $p(0) = 0$*;*
2. $\forall\, x, y \in X, \quad |p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$*;*
3. $\forall\, x \in X, \quad p(x) \geq 0$*;*
4. $\{x \in X \,|\, p(x) = 0\}$ *é um subespaço vectorial de X;*
5. *O conjunto $B = \{x \in X \,|\, p(x) < 1\}$ é convexo, equilibrado, absorvente e $p = \mu_B$.*

Prova:

1. Segue directamente da propriedade $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ das seminormas.
2. A subaditividade de p mostra que $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$ pelo que
$$p(x) - p(y) \leq p(x - y).$$
Como $p(x - y) = |-1| p(y - x) = p(y - x)$ obtém-se facilmente
$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y).$$

3. Através das alíneas anteriores, basta tomar $y = 0$, para se obter o resultado pretendido.

4. Se x e y são tais que $p(x) = p(y) = 0$, então

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad p(\alpha x + \beta y) = |\alpha| p(x) + |\beta| p(y) = 0.$$

   Logo o conjunto $\{x \in X \,|\, p(x) = 0\}$ é um subespaço vectorial de X.

5. O conjunto B é claramente equilibrado.

   Se $x, y \in B$ e $0 < t < 1$, então

$$p(tx + (1-t)y) = tp(x) + (1-t)p(y) < 1$$

   donde B é convexo.

   Se $x \in X$ e $s > p(x)$, então $p(s^{-1}x) = s^{-1}p(x) < 1$ pelo que B é absorvente e $\mu_B(x) \leq s$. Vem que $\mu_B(x) \leq p(x)$. Se $0 < t < p(x)$, então $p(t^{-1}x) \geq 1$ e, portanto, $t^{-1}x \notin B$ o que implica que $p(x) \leq \mu_B(x)$. Logo $p = \mu_B$. □

Considere-se um espaço vectorial topológico convexo (X, τ). Uma base local β convexa define uma família separável de seminormas, da mesma forma que, uma família separável de seminormas $\mathcal{P}$ define uma base local convexa, tal como se descreve na proposição seguinte.

Proposição 1.19
Seja β uma base local convexa de um espaço vectorial topológico (X, τ).

1. $\forall\ V \in \beta,\ V = \{x \in X \,|\, \mu_V(x) < 1\}$*;*

2. $\{\mu_V \,|\, V \in \beta\}$ *é uma família separável de seminormas contínuas em* X.

Prova:
Seja β uma base local convexa de um espaço vectorial topológico (X, τ).

1. Seja $\theta_x : \mathbb{K} \longrightarrow X$ a função definida por $\theta_x(\alpha) = \alpha x$. Seja $V \in \beta$. Como θ_x é contínua e $\theta_x(1) = x$, se $x \in V$, então $\theta_x^{-1}(V)$ é um aberto de $\mathbb{K}$ que contém 1. Assim,

$$\exists\, t < 1 : t^{-1}x \in V.$$

   Desta forma, tem-se que $\mu_V(x) < 1$.

   Suponha-se que $x \notin V$. Se $t^{-1}x \in V$ então $t \geq 1$ pois V é convexa, portanto, $\mu_V(x) \geq 1$.

2. Sabe-se que μ_V é uma seminorma para todo o $V \in \beta$. Para $r > 0$ verifica-se que se $(x - y) \in rV$ então

$$|\mu_V(x) - \mu_V(y)| \leq \mu_V(x - y) < r.$$

   Pode provar-se que, desta forma, μ_V é contínua.

   Falta apenas provar que a família de seminormas $\{\mu_V \,|\, V \in \beta\}$ é separável. Se $x \in X$ e $x \neq 0$ então $x \notin W$ para algum $W \in \beta$. Logo $\mu_W(x) \geq 1$. $\square$

Proposição 1.20
Seja $\mathcal{P}$ uma família separável de seminormas num espaço vectorial X. Associe-se a cada $p \in \mathcal{P}$ e a cada inteiro positivo n o conjunto

$$V(p,n) = \left\{ x \in X \,|\, p(x) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Seja β o conjunto de todas as intersecções finitas dos conjuntos $V(p,n)$. β é uma base local convexa de uma topologia τ de X de forma a que X seja um espaço vectorial topológico localmente convexo que respeite as seguintes propriedades:

1. *toda a seminorma $p \in \mathcal{P}$ é contínua;*

2. *$E \subset X$ é limitado se e só se toda a seminorma $p \in \mathcal{P}$ é limitada em E.*

Prova :
Sejam os abertos de X os conjuntos que se obtêm através da união e translação de elementos de β. Desta forma, constrói-se uma topologia τ em X, invariante por translação, na qual β é uma base local convexa.

Sejam $x \in X$ e $x \neq 0$. Como $\mathcal{P}$ é separável $p(x) > 0$ para algum $p \in \mathcal{P}$. Assim, $x \notin V(p,n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$ pelo que x não pertence ao fecho de $\{0\}$ e, consequentemente, $\{0\}$ é fechado. Como a topologia é invariante por translação todos os pontos de X são fechados.

Para se mostrar que a adição de vectores é contínua em 0 considere-se uma vizinhança $U \in \mathcal{V}_0$. Por construção, existem seminormas $p_1, p_2, ..., p_k$ e inteiros $n_1, n_2, ..., n_k$ tais que $U \supset \bigcap_{i=1}^{k} V(p_i, n_i)$. A fim de simplificar a escrita, considera-se aqui que

$$U \supset V(p,n)$$

para alguma seminorma $p \in \mathcal{P}$ e algum inteiro positivo n. Considere-se ainda

$$W = V(p, 2n).$$

Através da propriedade da subaditividade das seminormas, facilmente se verifica que $W + W \subset U$, ficando assim provada a continuidade pontual da adição de vectores e, portanto, a continuidade.

Para que X seja um espaço vectorial topológico basta verificar a continuidade da multiplicação de um vector por um escalar. Sejam $x \in X, \alpha \in \mathbb{R}$ e U e W os abertos definidos anteriormente. Tem-se que $x \in sW$ para algum $s > 0$. Seja $t = \frac{s}{1+|\alpha|s}$. Se $y \in x + tW$ e $|\beta - \alpha| < \frac{1}{s}$, então

$$\beta y - \alpha x = \beta(y - x) + (\beta - \alpha)x \quad \in \quad |\beta|tW + |\beta - \alpha|sW \subset W + W \subset U$$

pois $|\beta|t \leq 1$ e W é equilibrado. Fica então provado que a multiplicação de um vector por um escalar é contínua em $(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times X$.

Através da definição de $V(p,n)$, é imediato provar que toda a seminorma $p \in \mathcal{P}$ é contínua em 0 e pelas propriedades de subaditividade p é contínua em todos os pontos de X.

Por último, mostre-se que $E \subset X$ é limitado se e só se p é limitada em E, para toda a seminorma $p \in \mathcal{P}$. Seja $E \subset X$ um conjunto limitado. Fixado $p \in \mathcal{P}$, $E \subset kV(p, 1)$ para algum $k < +\infty$. Assim, $p(x) < k$ para todo o $x \in E$ e, portanto, p é limitado em E.

Reciprocamente, suponha-se que toda a seminorma $p \in \mathcal{P}$ é limitada em E. Seja U o aberto definido anteriormente. Como todas as seminormas são limitadas em E, existe $M < +\infty$ tal que $p < M$ em E. Se $n_0 > Mn$, então $E \subset n_0 U$. Logo E é limitado. □

Note-se que sendo (X, τ) um espaço vectorial topológico localmente convexo de base local β, a topologia gerada, no sentido da proposição anterior, pela família de seminormas $\{\mu_V \,|\, V \in \beta\}$ coincide com τ.

Quando um espaço vectorial topológico é normável, é possível caracterizar a sua topologia através de uma norma que lhe seja compatível. No entanto, quando isso não acontece, uma família de seminormas pode ser uma boa alternativa.

Capítulo 2

Distribuições

2.1 Os espaços $C^\infty(\Omega)$ e D_K

Seja Ω um aberto de $\mathbb{K}^n$. Considerem-se os conjuntos compactos $K_n,\ n \in \mathbb{N}$, definidos da seguinte forma:

$$K_n = \left\{ x \in \mathbb{K}^n \,|\, d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Se o aberto Ω for limitado pode ser visto como a união numerável de compactos $K_n \neq \emptyset$. Além disso,

$$K_n \subset \dot{K}_{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Se Ω não for limitado, outra consturção pode ser feita de forma a que Ω seja a união numerável de compactos $K_n \neq \emptyset$ tais que $K_n \subset \dot{K}_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por um lado, sabe-se que os conjuntos K_n são compactos. Por outro, a imagem de um compacto por uma aplicação contínua é ainda um compacto. Assim, pode definir-se uma família $\mathcal{P}$ de seminormas no espaço das aplicações contínuas em Ω, $C(\Omega)$, onde a seminorma p_n, $n \in \mathbb{N}$, é definida por:

$$p_n(f) = max\{|f(x)|, x \in K_n\}.$$

Esta família é obviamente separável.

Pela Proposição 1.20 tem-se que o conjunto β de todas as intersecções finitas dos conjuntos da forma

$$V_n = \left\{ f \in C(\Omega) \,|\, p_n(f) < \frac{1}{n} \right\}$$

com $n \in \mathbb{N}$, é uma base local convexa de uma topologia $\tau_{C(\Omega)}$ de $C(\Omega)$. Pela proposição referida sabe-se também que um conjunto $E \subset C(\Omega)$ é limitado se e só se

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, M_n < \infty,\ \forall\, f \in E : p_n(f) < M_n.$$

No entanto, para todo o $n \in \mathbb{N}$, existem funções $f \in V_n$, tais que $p_{n+1}(f)$ é tão grande quanto se queira pelo que não existem conjuntos V_n que sejam limitados. Assim, $(C(\Omega), \tau_{C(\Omega)})$ não é localmente limitado donde, pela Proposição 1.17, não é normável.

Apresentam-se seguidamente algumas notações.

- Quando se estudar funções de domínio $\mathbb{K}^n$, α representará o n-uplo $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ de inteiros não negativos;
- o operador diferencial

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

  será denotado por D^α e dito de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.

Definição 2.1
O conjunto $C^\infty(\Omega)$ é formado por todas as funções f tais que $D^\alpha f \in C(\Omega)$ para todo o n-uplo α.

Tal como foi feito anteriormente, pode definir-se uma topologia em $C^\infty(\Omega)$ através de uma família $\mathcal{P}$ de seminormas, tal que a seminorma $p_n, n \in \mathbb{N}$, é definida por

$$p_n(f) = max\{|D^\alpha f(x)| \ \ | \, x \in K_n, |\alpha| \leq n\}.$$

Esta família de seminormas define uma topologia convexa, $\tau_{C^\infty(\Omega)}$, em $C^\infty(\Omega)$ e o conjunto β de todas as intersecções finitas dos conjuntos da forma

$$V_n = \left\{ f \in C^\infty(\Omega), p_n(f) < \frac{1}{n} \right\},$$

com $n \in \mathbb{N}$, formam uma base local de $(C^\infty(\Omega), \tau_{C^\infty(\Omega)})$.

Lembre-se o seguinte resultado elementar.

Proposição 2.2
Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções deriváveis em $[a,b]$.
Se para algum $c \in [a,b]$ a sequência numérica $(f_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ converge e se a sequência das derivadas $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[a,b]$ para uma função g_1 então a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[a,b]$ para uma função derivavel g_0 tal que $g'_0 = g_1$.

Prova:
Seja $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas e suponha-se que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para g_1. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in [a,b], \quad f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f'_n(t)dt.$$

Prova-se também que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} (f_n(t))\,dt$ pelo que

$$g_0(x) = g_0(c) + \int_c^x g_1(t)dt.$$

Conclui-se que $g'_0 = g_1$. □

Proposição 2.3
O espaço vectorial topológico $(C^\infty(\Omega), \tau_{C^\infty(\Omega)})$ é completo.

Prova:
Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $C^\infty(\Omega)$. Fixado um $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $(f_i - f_j) \in V_n$ para i e j suficientemente grandes pelo que, em K_n,

$$|D^\alpha f_i - D^\alpha f_j| < \frac{1}{n}, \quad \forall\, \alpha \leq n.$$

A sequência $(D^\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para g_α em K_n e, em particular, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para g_0 em K_n. Como a convergência é uniforme e as sequências são de aplicações contínuas, as aplicações limite g_α são também contínuas para todo o α.

Pela Proposição 1.15, se a sequência das aplicações $(D^\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para g_α em K_n e a sequência das aplicações $(D^{\alpha+1} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $g_{\alpha+1}$ em K_n, então $g'_\alpha = g_{\alpha+1}$. Além disso, g_α e

g'_α são contínuas em K_n, para todo o $n \in \mathbb{N}$ pelo que, como $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$, são contínuas em Ω. Logo $g_0 \in C^\infty(\Omega)$. $\square$

Pode também provar-se que este espaço tem a propriedade de Heine-Borel e como tem dimensão infinita, pela Proposição 1.16, não é localmente limitado pelo que, pela Proposição 1.17, não é normável.

Em seguida, introduz-se o conceito de suporte de uma função que será útil na definição dos espaços D_K.

Definição 2.4 (suporte)
O suporte de uma função $f : X \longrightarrow Y$ é a aderência do conjunto

$$\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

e denota-se por supp (f).

Definição 2.5
Seja K um subconjunto compacto de Ω. D_K é o conjunto de todas as funções $f \in C^\infty(\Omega)$ cujo suporte está contido em K.

Seja (X, τ) um espaço vectorial topológico e $Y \subset X$. Chama-se *topologia induzida* em Y pela topologia de X à topologia definida por

$$\tau_Y = \{Y \cap A \mid A \in \tau\}.$$

Considerar-se-á em D_K a topologia τ_K, induzida da topologia $\tau_{C^\infty(\Omega)}$.

Se $K \subset \Omega$, prova-se que D_K é um subespaço vectorial de $C^\infty(\Omega)$. Além disso, se $\dot{K} \neq \emptyset$ então D_K tem dimensão infinita. Neste sentido, considere-se a proposição seguinte.

Proposição 2.6
Se B_1 e B_2 são dois intervalos fechados em $\mathbb{R}$ tais que $B_1 \subset \dot{B}_2$, então existe $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\phi(x) = 1$ para $x \in B_1$ e $\phi(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R} \setminus B_2$.

Prova:
Sejam a e b dois reais positivos tais que $a < b$. Com o intuito de provar a existência de uma função $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ nas condições enunciadas na proposição, construir-se-à uma função $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $g(x) = 0$ para $x < a$ e $g(x) = 1$ para $x > b$.

Sejam δ_i, com $i \in \mathbb{N}$, números positivos tais que $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i = b - a$ e $m_n = \frac{2^n}{\delta_1 \ldots \delta_n}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Seja f_0 uma função contínua tal que $f_0(x) = 0$ para $x < a$ e $f_0(x) = 1$ para $x > a + \delta_1$. A existência desta função está garantida.

Considere-se ainda f_n definida da seguinte forma:

$$f_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_{x-\delta_n}^{x} f_{n-1}(t)dt.$$

Prove-se, por indução, que $f_n \in C^n(\mathbb{R})$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Tem-se que

$$f_1(x) = \frac{1}{\delta_1} \int_{x-\delta_1}^{x} f_0(t)dt$$

e f_0 é contínua, portanto, pelo teorema fundamental do cálculo, sabe-se que

$$Df_1(x) = \frac{1}{\delta_1} \left(f_0(x) - f_0(x - \delta_1) \right),$$

donde f_1 é diferenciável e a sua derivada é contínua.

Considere-se $f_{n-1} \in C^{n-1}(\mathbb{R})$. Tal como anteriormente, tem-se que

$$Df_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \left(f_{n-1}(x) - f_{n-1}(x - \delta_n) \right).$$

Conclui-se que $f_n \in C^n(\mathbb{R})$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Em seguida prova-se, também por indução, que $|D^n f_n| < m_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Pelo que já foi dito anteriormente sabe-se que

$$\begin{aligned} |Df_1(x)| &\leq \left| \tfrac{1}{\delta_1} \left(f_0(x) - f_0(x - \delta_1) \right) \right| \\ &\leq \tfrac{1}{\delta_1} \left(|f_0(x)| + |f_0(x - \delta_1)| \right) \\ &\leq \tfrac{2}{\delta_1} \\ &\leq m_1 \end{aligned}$$

Considere-se, por hipótese de indução, que $|D^n f_{n-1}(x)| \leq m_{n-1}$. Neste caso,

$$\begin{aligned}
|D^n f_n(x)| &\leq \tfrac{1}{\delta_n}(x)\,|D^{n-1} f_{n-1}(x) - D^{n-1} f_{n-1}(x-\delta_n)| \\
&\leq \tfrac{1}{\delta_n}(x)\,(|D^{n-1} f_{n-1}(x)| + |D^{n-1} f_{n-1}(x-\delta_n)|) \\
&\leq \tfrac{1}{\delta_n} 2m_{n-1} \\
&\leq m_n.
\end{aligned}$$

Conclui-se que $|D^n f_n| < m_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Considere-se novamente $f_n(x) = \frac{1}{\delta_n}\int_{x-\delta_n}^{x} f_{n-1}(t)dt$. Efectuando a mudança de variável $s = x - t$ obtém-se:

$$f_n(x) = -\frac{1}{\delta_n}\int_{\delta_n}^{0} f_{n-1}(x-s)ds = \frac{1}{\delta_n}\int_{0}^{\delta_n} f_{n-1}(x-s)ds.$$

Seja $r < n$. Prova-se por indução que

$$D^r f_n(x) = \frac{1}{\delta_n}\int_0^{\delta_n} \left(D^r f_{n-1}\right)(x-s)ds$$

sendo $\|D^r f_n\| \leq m_r$. Aplicando o Teorema do Valor Médio, são válidas as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned}
\|D^r f_n - D^r f_{n-1}\| &\leq \frac{1}{\delta_n}\int_0^{\delta_n} |D^r f_{n-1}(x-s) - D^r f_{n-1}(x)|\, ds \\
&\leq \frac{1}{\delta_n}\int_0^{\delta_n} \left| -s\frac{D^r f_{n-1}(x-s) - D^r f_{n-1}(x)}{-s}\right| ds \\
&\leq \frac{1}{\delta_n}\int_0^{\delta_n} \left|-sD^{r+1} f_{n-1}(\xi(s))\right| ds \\
&\leq \frac{1}{\delta_n}\,\delta_n \left\|-sD^{r+1} f_{n-1}\right\| \\
&\leq \delta_n \left\|D^{r+1} f_{n-1}\right\| \\
&\leq \delta_n m_{r+1}.
\end{aligned}$$

Como a série $\sum_{i=1}^{+\infty} \delta_i$ é convergente, a sequência $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0 e, portanto, a sequência $(D^r f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$. Pode então dizer-se que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para uma função g e que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ pois

$$D^n g \in C^n(\mathbb{R}), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, $g(x) = 0$, para todo o $x < a$ e $g(x) = 1$, para todo o $x > b$. Encontrou-se pois a função pretendida. $\square$

2.2 Os espaços $D(\Omega)$ e $D'(\Omega)$

O espaço $D(\Omega)$ é o conjunto de todas as aplicações de $C^\infty(\Omega)$ de suporte compacto. $D(\Omega)$ pode ser visto como a união de todos os espaços D_K onde K é um compacto de Ω. Trata-se claramente de um espaço vectorial e designa-se por *espaço das funções teste*.

Poder-se-ia considerar em $D(\Omega)$ a topologia definida pela família de seminormas $\{\|.\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (que neste caso é também uma família de normas) na qual a seminorma $\|.\|_n$ é definida, para $\varphi \in D(\Omega)$, n inteiro não negativo, $|\alpha| \leq n$ e $x \in \Omega$, por:

$$\|\varphi\|_n = max\left\{|D^\alpha \varphi(x)|\right\}.$$

No entanto, com tal topologia, o espaço vectorial teria a desvantagem de não ser completo.

Considere-se a aplicação $\varphi \in D(\mathbb{R})$ com suporte em $[0,1]$ tal que $\varphi(x) > 0$ em $(0,1)$. Defina-se a sucessão $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$ por

$$\psi_n(x) = \varphi(x-1) + \frac{1}{2}\varphi(x-2) + ... + \frac{1}{n}\varphi(x-n).$$

Esta é obviamente uma sucessão de Cauchy. No entanto, $\lim_{n\to+\infty} \psi_n$ não tem suporte compacto, portanto, esta sucessão não converge em $D(\mathbb{R})$.

Torna-se pois necessário definir uma outra topologia τ_Ω em $D(\Omega)$ na qual as sequências de Cauchy convirjam. Define-se em seguida uma topologia nestas condições.

Definição 2.7
Seja Ω um aberto de $\mathbb{K}^n$. Seja β a colecção de todos os conjuntos convexos e equilibrados W de $D(\Omega)$ tais que $D_K \cap W \in \tau_K$, para todo o subconjunto compacto K de Ω.

A topologia τ_Ω é a colecção de todas as uniões de conjuntos da forma $\varphi + W$, com $\varphi \in D(\Omega)$ e $W \in \beta$.

Seguem-se algumas propriedades da topologia τ_Ω.

Proposição 2.8
Seja Ω um aberto de $\mathbb{K}^n$. Seja β a colecção de todos os conjuntos convexos W de $D(\Omega)$ tais que $D_K \cap W \in \tau_K$, para todo o subconjunto compacto K de Ω.

1. *Um subconjunto convexo V de $D(\Omega)$ é aberto se e só se $V \in \beta$;*

2. *A topologia τ_K de qualquer $D_K \subset D(\Omega)$ coincide com a topologia induzida de τ_Ω em D_K;*

3. *Se E é um subconjunto limitado de $D(\Omega)$ então $E \subset D_K$ para algum $K \subset \Omega$ e existem números $M_n < \infty$ tais que toda a aplicação $\varphi \in E$ satisfaz, para todo o $n \in \mathbb{N}$, as inequações $\|\varphi\|_n \leq M_n$.*

4. *$D(\Omega)$ tem a propriedade de Heine-Borel;*

5. *Se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $D(\Omega)$ então $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_K$ para algum $K \subset \Omega$;*

6. *Se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0 em $D(\Omega)$ então existe um compacto $K \subset \Omega$ que contém o suporte de todos os elementos de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(D^\alpha \varphi_n)_n$ converge para 0, qualquer que seja o α;*

7. *Toda a sequência de Cauchy em $D(\Omega)$ é convergente.*

Apesar desta proposição ser de difícil demonstração, a topologia à qual se refere é, na prática, de simples manuseamento visto as sucessões convergentes pertencerem, a partir de uma certa ordem, a um espaço topológico (D_K, τ_K).

Estão reunidas as condições para se apresentar o espaço vectorial topológico das distribuições.

Definição 2.9

O espaço $D'(\Omega)$ é o espaço dual do espaço $D(\Omega)$, ou seja, os elementos de $D'(\Omega)$ são precisamente as aplicações $f : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$ lineares e contínuas e designam-se por distribuições.

A seguinte proposição fornece uma forma alternativa de se verificar se determinada aplicação linear é ou não uma distribuição.

Proposição 2.10

Se $f : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$ é uma aplicação linear então as seguintes proposições são equivalentes:

1. *$f \in D'(\Omega)$;*
2. *A todo o compacto $K \subset \Omega$ corresponde um inteiro não negativo N_K e uma constante $C < \infty$ tais que a desigualdade $|f(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_{N_K}$ se verifica para todo $\varphi \in D_K$.*

De facto, as sucessões convergentes em $(D(\Omega), \tau_\Omega)$ são, pelo ponto 5 da proposição 2.8, precisamente as que convergem em algum (D_K, τ_K), abstracção feita a um número finito de termos. Logo f é contínua em $(D(\Omega), \tau_\Omega)$ se e só se $f|_{D_K}$ é contínua em (D_K, τ_K), para todo o compacto K. Basta para isso que $f|_{D_K}$ seja limitada numa vizinhança de 0, o que corresponde ao ponto 2 da proposição anterior.

Nota: Se $f \in D'(\Omega)$ e existe um inteiro não negativo N de modo a satisfazer a desigualdade do ponto dois da proposição anterior, independentemente de K, então a ordem de f é o menor número nessas condições. No caso em que tal número não exista, diz-se que f tem ordem infinita.

Capítulo 3

Diferenciação

3.1 Alguns exemplos de distribuições

Nesta secção, apresentam-se alguns exemplos de distribuições. Pretende-se mostrar que o conjunto das aplicações diferenciáveis é muito mais restrito do que o conjunto das distribuições.

Relembram-se seguidamente alguns conceitos básicos da teoria da integração. Seja X um conjunto. Diz-se que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ é uma *σ-álgebra* se

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de elementos de $\mathcal{A}$ então $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$;
- Se $A \in \mathcal{A}$ então $A^c \in \mathcal{A}$.

$(X, \mathcal{A})$ designa-se por *espaço mensurável.*

Uma *medida positiva* μ sobre $\mathcal{A}$ é uma aplicação $\mu : M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que verifica

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de elementos de $\mathcal{A}$ mutuamente exclusivos, então $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$;

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ diz-se um *espaço mensurado* .

Sejam $(X, \mathcal{A})$ e $(X', \mathcal{A}')$ espaços mensuráveis. A função $f : X \longrightarrow X'$ diz-se *mensurável* se, para todo o $A' \in \mathcal{A}'$, $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$.

A função $f : (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, onde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ denota o conjunto dos borelianos de $\mathbb{R}$ (isto é, a mais pequena σ-algebra que contém os abertos reais), diz-se *simples* se for mensurável e possuir apenas um número finito de valores distintos.

Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço mensurado. O *integral de uma função simples mensurável positiva* f é definido por

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mu \left(\{x \in X \mid f(x) = \alpha\} \right).$$

O *integral de uma função mensurável positiva* $f : (X, \tau) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ é definido por

$$\int_X f\, d\mu = Sup \left\{ \int_X g\, d\mu \mid g \text{ é simples positiva e } g \leq f \right\}.$$

O conceito de integral de uma função mensurável pode facilmente ser obtido a partir do anterior.

Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço mensurado e f uma função mensurável. Diz-se que

- f é *integrável* se $\displaystyle\int_X |f|\, d\mu < +\infty$;
- f é *localmente integrável* se, para todo o conjunto compacto $K \subset X$, $\displaystyle\int_K |f|\, d\mu < +\infty$.

Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço mensurado e $1 \leq p < +\infty$. Designa-se por

- $\mathbb{L}^p$ o espaço de todas as funções mensuráveis $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tais que $|f|^p$ é integrável;
- $\mathbb{L}^p_{loc}$ o espaço de todas as funções mensuráveis $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tais que $|f|^p$ é localmente integrável.

Distribuição associada a uma aplicação

Seja g uma aplicação localmente integrável, ou seja, $g \in \mathbb{L}^1_{loc}$.

Considere-se a aplicação $\Delta_g : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Delta_g(\varphi) = \langle \Delta_g, \varphi \rangle = \int_\Omega g\varphi \, d\mu.$$

Pretende-se provar que esta aplicação é uma distribuição. Para cada $\varphi \in D(\Omega)$ considere-se um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que *supp* $(\varphi) \subset K$. É trivial verificar que esta aplicação é linear. Basta então verificar a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} |\langle \Delta_g, \varphi \rangle| &\leq \left| \int_\Omega g\varphi \, d\mu \right| \\ &\leq \int_K |g\varphi| \, d\mu \\ &\leq \|\varphi\|_0 \int_K |g| \, d\mu. \end{aligned}$$

Conclui-se que Δ_g é uma distribuição. Neste caso, $N = 0$ e $C = \displaystyle\int_K |g| \, d\mu$, portanto, esta distribuição é de ordem 0.

A distribuição que se obteve através da aplicação g, denomina-se por *distribuição associada a* g ou, quando tal não der origem a ambiguidades, simplesmente g. Desta forma, e tendo em conta o que foi exposto anteriormente, pode afirmar-se que se g é localmente integrável, então g é uma distribuição.

Este resultado valida a seguinte inclusão:

$$\mathbb{L}^1_{loc}(\Omega) \subset D'(\Omega).$$

Outras inclusões podem também ser demonstradas.

Para se mostrar que $\mathbb{L}^p \subset \mathbb{L}^p_{loc}$ basta notar que, sendo K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$,

$$\int_K |f(x)|^p \, d\mu \leq \int_\mathbb{R} |f(x)|^p \, d\mu.$$

Para se mostrar que $\mathbb{L}^p_{loc} \subset \mathbb{L}^1_{loc}$, considere-se uma aplicação $f \in \mathbb{L}^p_{loc}(\mathbb{R})$. Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Seja $q \geq 1$ tal que $q^{-1} + p^{-1} = 1$.

Utilizando a desigualdade de Hölder, tem-se que:

$$\int_K |f|\, d\mu \leq \left(\int_K 1^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_K |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \leq \mu(K)^{\frac{1}{q}} \left(\int_K |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} < +\infty.$$

Logo $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Pode então afirma-se que

$$\mathbb{L}^p(\Omega) \subset \mathbb{L}^p_{loc}(\Omega) \subset \mathbb{L}^1_{loc}(\Omega) \subset D'(\Omega).$$

Valor principal de $\frac{1}{x}$

A aplicação $f_{\frac{1}{x}}$ definida por

$$\begin{array}{rccc} f_{\frac{1}{x}} : & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

não é localmente integrável pelo que não é possível associar uma distribuição a $f_{\frac{1}{x}}$ do modo como se procedeu com as aplicações de $\mathbb{L}^1_{loc}$. Note-se que, sendo $V \in \mathcal{V}_0$, se $\varphi \in D(\Omega)$ é tal que $V \subset supp\,(\varphi)$ e $\varphi(x) = 1$, para todo o $x \in V$, então a função

$$x \to \frac{1}{x}\, \varphi(x)$$

não é integrável.

A distribuição que seguidamente se apresenta é a distribuição associada a $f_{\frac{1}{x}}$ e designa-se por *valor principal de* $\frac{1}{x}$.

Considere-se a aplicação $Vp_{\frac{1}{x}} : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle Vp_{\frac{1}{x}}, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, d\mu.$$

Para se provar que esta aplicação linear está bem definida e é, de facto, uma distribuição, recorde-se que dada uma função $\varphi \in C^1$ existe uma função ψ tal que $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ e $\|\psi\|_0 \leq \|\varphi'\|_0$. Assim, considerantdo $supp(\varphi) \subset K$,

$$\begin{aligned}
\left|\langle Vp_{\frac{1}{x}}, \varphi\rangle\right| &= \left|\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\{|x|>\epsilon\}\cap K}\frac{\varphi(x)}{x}d\mu\right| \\
&\leq \left|\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\{|x|>\epsilon\}\cap K}\frac{\varphi(0)}{x}d\mu\right| + \left|\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\{|x|>\epsilon\}\cap K}\psi(x)d\mu\right| \\
&\leq \left|\int_K \psi(x)d\mu\right| \\
&\leq \mu(K)\|\varphi\|_1
\end{aligned}$$

Onde ψ é uma aplicação tal que $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ e $\|\psi\|_0 \leq \|\varphi'\|_0$.
Esta distribuição tem ordem 1.

Parte finita de $\frac{1}{x^2}$

Considere-se a aplicação $f_{\frac{1}{x^2}}$ definida por

$$\begin{array}{rccc}
f_{\frac{1}{x^2}} & : \mathbb{R}-\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& x & \longmapsto & \frac{1}{x^2}
\end{array}$$

Verifica-se que esta aplicação também não é integrável. Assim, é necessário, tal como foi feito com a aplicação $f_{\frac{1}{x}}$, associar a $f_{\frac{1}{x^2}}$ uma distribuição diferente da que se associaria no caso desta pertencer a $\mathbb{L}^1_{loc}$.

A distribuição que se apresenta em seguida, é a distribuição associada a $f_{\frac{1}{x^2}}$ e designa-se por *parte finita de* $\frac{1}{x^2}$.

Considere-se a aplicação $Pf_{\frac{1}{x^2}} : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle Pf_{\frac{1}{x^2}}, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{|x|\geq\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}d\mu - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon}\right].$$

Prova-se que esta aplicação linear é uma distribuição. Basta lembrar que dada uma função $\varphi \in C^2$ existe uma função ψ tal que $\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \psi(x)x^2$ onde $\|\psi\|_0 \leq \|\varphi''\|_0$.

Assim, para $supp(\varphi) \subset K$,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{|x|\geq\epsilon} \mathbf{1}_K(x)\frac{\varphi(x)}{x^2}\,d\mu - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon}\right] \leq \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{|x|\geq\epsilon} \mathbf{1}_K(x)\left(\frac{\varphi(0)}{x^2}+\frac{\varphi'(0)}{x}+\psi(x)\right)d\mu - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon}\right]$$

$$\leq \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{|x|\geq\epsilon} \mathbf{1}_K(x)\frac{\varphi(0)}{x^2}\,d\mu + \int_{|x|\geq\epsilon} \mathbf{1}_K(x)\frac{\varphi'(0)}{x}\,d\mu + \int_{|x|\geq\epsilon} \mathbf{1}_K(x)\psi(x)\,d\mu - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon}\right]$$

$$\leq \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{|x|\geq\epsilon} \mathbf{1}_K(x)\frac{\varphi(0)}{x^2}\,d\mu - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon}\right] + C\|\varphi''\|$$

$$\leq \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{[-a,-\epsilon]} \frac{\varphi(0)}{x^2}\,d\mu + \int_{[\epsilon,a]} \frac{\varphi(0)}{x^2}\,d\mu - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon}\right] + C\|\varphi\|_2$$

$$\leq \lim_{\epsilon\to 0}\left[-\frac{\varphi(0)}{-\epsilon} - \frac{-\varphi(0)}{-a} + \frac{-\varphi(0)}{a} - \frac{-\varphi(0)}{\epsilon} - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon}\right] + C\|\varphi\|_2$$

$$\leq \frac{-2\varphi(0)}{a} + C\|\varphi\|_2$$

$$\leq \left(C - \frac{2}{a}\right)\|\varphi\|_2$$

onde C é uma constante real e $a \in \mathbb{R}$ é tal que $supp\,(\varphi) \subset K = [-a, a]$.

Esta distribuição tem ordem 2.

Produto de uma aplicação por uma distribuição

Consideremos a aplicação $\psi \in C^\infty(\Omega)$ e a distribuição $\Delta \in D'(\Omega)$. O produto da aplicação ψ pela distribuição Δ é definido por

$$\langle \psi\Delta, \varphi\rangle = \langle \Delta, \psi\varphi\rangle.$$

Note-se que se $\varphi \in D(\Omega)$ e $\psi \in C^\infty(\Omega)$, então $\varphi\psi \in D(\Omega)$. Logo o produto está bem definido e verifica-se facilmente que se trata ainda de uma distribuição.

Outros exemplos

Todas as distribuições apresentadas até aqui estão associadas a uma aplicação. No entanto, não é este o caso de todas as distribuições, como se mostrará em seguida.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ fixos. Considere-se a aplicação O_n definida por

$$\begin{array}{rccc} O_n : & D(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi^{(n)}(x_0). \end{array}$$

Esta aplicação é linear e verifica-se que

$$|\langle O_n, \varphi\rangle| \leq \left|\varphi^{(n)}(x_0)\right| \leq \|\varphi\|_n$$

donde O_n é uma distribuição de ordem n.

Seja μ uma medida. Diz-se que μ *é finita nos compactos* se $\mu(K) < \infty$, para todo o compacto K.

Para que uma medida μ seja uma distribuição basta que seja finita nos conjuntos compactos. Considere-se μ nestas condições e a aplicação ϕ definida por

$$\begin{array}{rccc} \phi : & D(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \varphi & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega \varphi \, d\mu. \end{array}$$

Esta aplicação é linear e além disso,

$$\begin{aligned} |\langle \phi, \varphi\rangle| &\leq \left|\textstyle\int_\Omega \varphi d\mu\right| \\ &\leq \int_K |\varphi| d\mu \\ &\leq \|\varphi\|_0 \int_K d\mu \\ &\leq \|\varphi\|_0 \mu(K) \end{aligned}$$

pelo que esta é uma distribuição de ordem 0.

3.2 Derivada de uma distribuição

Inicia-se esta secção com a definição do conceito de derivada de uma distribuição. Este não contradiz o conceito clássico, mas generaliza a diferenciação a muitos objectos matemáticos onde aquele não podia ser utilizado.

Definição 3.1 (derivada de uma distribuição)
Seja $\Delta : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$ *uma distribuição. A derivada de* Δ*, que se nota por* Δ'*, é a distribuição*

$$\begin{array}{rccc} \Delta' : & D(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \varphi & \longmapsto & -\langle \Delta, \varphi' \rangle \end{array}$$

Note-se que a derivada de uma distribuição está bem definida pois se $\varphi \in D(\Omega)$, então $\varphi' \in D(\Omega)$.

Note-se que com esta definição de derivada de uma distribuição, para $f \in C^1$, $(\Delta_f)' = \Delta_{f'}$:

Seja $\varphi \in D(\Omega$ e considerem-se $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $supp\,(\varphi) \subset [a, b]$. Tem-se que:

$$\begin{aligned} \langle \Delta'_f, \varphi \rangle &= -\langle \Delta_f, \varphi' \rangle \\ &= -\int_{\mathbb{R}} f\varphi'\, d\mu \\ &= -\,[f\varphi]_a^b + \int_{[a,b]} f'\varphi\, d\mu \\ &= \langle \Delta_{f'}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

O conceito de derivada fica assim devidamente generalizado.

Na secção anterior verificou-se que o conjunto das distribuições é bem mais abrangente que o conjunto das funções diferenciáveis. Assim, com esta nova definição, é possível derivar, entre outras funções, as diferenciáveis no sentido clássico, as contínuas ou ainda aquelas que não sendo sequer contínuas são localmente integráveis.

Pelo facto da generalização do conceito de derivada respeitar o conceito clássico, algumas propriedades clássicas podem também ser generalizadas.

Proposição 3.2
Sejam $f, g \in D'(\Omega)$, $h \in C^\infty(\Omega)$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$.

1. $(f+g)' = f' + g'$;
2. $(hf)' = h'f + hf'$;
3. $(\alpha f)' = \alpha f'$.

Prova:
Sejam $f, g \in D'(\Omega)$, $h \in C^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

1.
$$\begin{aligned}
\langle (f+g)', \varphi \rangle &= \langle f+g, \varphi' \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} (f(x)+g(x))\varphi'(x)\, d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\, d\mu + \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi'(x)\, d\mu \\
&= -\langle f, \varphi' \rangle + -\langle g, \varphi' \rangle \\
&= \langle f', \varphi \rangle + \langle g', \varphi \rangle;
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\langle gf' + g'f, \varphi\rangle &= \langle gf', \varphi\rangle + \langle g'f, \varphi\rangle \\
&= \langle f', g\varphi\rangle + \langle f, g'\varphi\rangle \\
&= -\langle f, (g\varphi)'\rangle + \langle f, g'\varphi\rangle \\
&= -\langle f, g'\varphi + g\varphi'\rangle + \langle f, g'\varphi\rangle \\
&= -\langle f, g'\varphi\rangle - \langle f, g\varphi'\rangle + \langle f, g'\varphi\rangle \\
&= -\langle f, g\varphi'\rangle \\
&= -\langle gf, \varphi'\rangle \\
&= \langle (gf)', \varphi\rangle;
\end{aligned}$$

3. É um caso particular da alínea anterior. Basta notar que a derivada de uma constante é zero. □

Os engenheiros e físicos usavam, desde o século XIX, diferentes cálculos operacionais para resolver facilmente diversos tipos de equações diferenciais. Estes cálculos, apesar de não serem suportados por nenhuma teoria matemática conduziam, muitas vezes, a resultados satisfatórios.

Dirac definiu δ, (posteriormente designada) *função de Dirac*, como sendo uma aplicação que respeitava as condições

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p)\, dp = 1,$
2. $\delta(p) = 0$ para $p \neq 0$.

Em finais do séc. XIX o engenheiro electrónico O. Heaviside desenvolveu um cálculo operacional no qual δ aparece como a derivada de uma aplicação H definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0 \\ 1\,, & x \geq 0 \end{cases}$$

Este raciocínio intuicionista difundiu-se, em larga escala, no primeiro terço do séc XX. A função H de Heaviside a par de funções singulares como a função δ de Dirac são instrumentos indispensáveis à modelação matemática de determinados fenómenos físicos.

A definição clássica de derivada não fornece prova matemática rigorosa da hipótese $H' = \delta$, comprovada experimentalmente e aceite de forma generalizada pelos físicos e engenheiros. No entanto, como H é localmente integrável conclui-se facilmente, pela teoria das distribuições, que tem derivada. Veja-se o seguinte exemplo.

Exemplo 3.3

Considere-se a função H de Heaviside. Esta função é localmente integrável sendo, portanto, uma distribuição. Assim,

$$\begin{aligned}
\langle H', \varphi \rangle &= -\langle H, \varphi' \rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)\, d_\mu \\
&= -\int_0^b \psi'(x)\, d_\mu \\
&= -(\varphi(b) - \varphi(0)) \\
&= \varphi(0) \\
&= \langle \delta, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Tem-se então que $H' = \delta$.

Como se verificou, a teoria das distribuições proporcionou um enquadramento matemático rigoroso para os cálculos intuicionistas que se vinham desenvolvendo.

Com a teoria clássica, a diferenciação tinha muitas restrições. Recorde-se que mesmo em funções contínuas, como é o caso da função módulo, não existia derivada em alguns pontos do domínio. Com a teoria das distribuições ultrapassa-se essas dificuldades, uma vez que esta permite derivar todas as funções localmente integráveis. Em particular, todas as funções contínuas são diferenciáveis, no contexto das distribuições. Repare-se no seguinte exemplo.

Exemplo 3.4
A função módulo pode ser escrita através da função de Heaviside, da seguinte forma:

$$|x| = x[H(x) - H(-x)] = x[2H(x) - 1].$$

Deve-se notar que a função identidade é de classe C^∞. Tem-se que

$$\begin{aligned} |x|' &= x'(2H(x)-1) + x(2H(x)-1)' \\ &= 2H(x) - 1 + x \times 2\delta_0(x) \\ &= 2H(x) - 1. \end{aligned}$$

Além das funções localmente integráveis, podem derivar-se outras funções.

As distribuições associadas a $f_{\frac{1}{x}}$ e $f_{\frac{1}{x^2}}$ são $Vp_{\frac{1}{x}}$ e $Pf_{\frac{1}{x^2}}$, respectivamente, pelo que apesar de nenhuma delas ser localmente integrável é de esperar que $Vp'_{\frac{1}{x}} = -Pf_{\frac{1}{x^2}}$. Vejamos,

$$\begin{aligned} \langle Vp'_{\frac{1}{x}}, \varphi \rangle &= -\langle Vp_{\frac{1}{x}}, \varphi' \rangle \\ &= -\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\, d\mu \\ &= -\lim_{\epsilon \to 0} \left(\left[\frac{\varphi(x)}{x} \right]_{\epsilon}^{a} + \left[\frac{\varphi(x)}{x} \right]_{-a}^{-\epsilon} - \int_{|x|>\epsilon} -\frac{\varphi(x)}{x^2}\, d\mu \right) \\ &= -\lim_{\epsilon \to 0} \left(-\frac{\varphi(\epsilon)}{\epsilon} + \frac{\varphi(-\epsilon)}{-\epsilon} + \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, d\mu \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\varphi(\epsilon)+\varphi(-\epsilon)}{\epsilon} - \int_{|x|>\epsilon}\frac{\psi(x)}{x^2}\,d\mu\right)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\varphi(\epsilon)+\varphi(-\epsilon)-2\varphi(0)}{\epsilon} + \frac{2\varphi(0)}{\epsilon} - \int_{|x|>\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,d\mu\right)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\varphi(\epsilon)-\varphi(0)}{\epsilon} + \frac{\varphi(-\epsilon)-\varphi(0)}{\epsilon} - \int_{|x|>\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,d\mu + \frac{2\varphi(0)}{\epsilon}\right)\\
&= \varphi'(0)-\varphi'(0)\lim_{\epsilon\to 0}\left(-\int_{|x|>\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,d\mu + \frac{2\varphi(0)}{\epsilon}\right)\\
&= \langle -Pf_{\frac{1}{x^2}},\varphi\rangle.
\end{aligned}
$$

Assim, $Vp'_{\frac{1}{x}} = -Pf_{\frac{1}{x^2}}$, como se esperava.

Capítulo 4

Equações de Derivadas Parciais

As vantagens da generalização do conceito de derivada não se esgotam com a capacidade de derivar um número muito maior de aplicações.

Todos os campos da matemática que, de alguma forma estão relacionados com a diferenciação sofreram, com a teoria das distribuições, uma enorme evolução.

Neste trabalho, optou-se por apresentar uma das muitas aplicações da teoria das distribuições: a resolução de equações de derivadas parciais.

A transformada de Fourier, bem como o produto de convolução, tem um papel de relevo na resolução de equações diferenciais. Nas primeiras secções deste capítulo vão ser estudados estes dois conceitos em diferentes contextos.

Convencionou-se, anteriormente, que Ω representava um qualquer aberto de $\mathbb{K}^n$. A partir deste momento, passará a representar apenas um aberto de $\mathbb{R}$.

Definição 4.1 (suporte de uma distribuição)
O suporte de uma distribuição $\Delta \in D'(\Omega)$, é o complementar do conjunto W formado pela união de todos os abertos ω nos quais Δ se anula, ou seja, nos quais $\langle \Delta, \phi \rangle = 0$ para toda a aplicação $\phi \in D(\omega)$.

O suporte de uma distribuiçcao $\Delta \in D'(\Omega)$ denota-se por S_Δ.

Seguidamente enunciam-se algumas propriedades das distribuições relacionadas com o seu suporte.

Proposição 4.2
Seja $\Delta \in D'(\Omega)$.

1. *Seja $\phi \in D(\Omega)$. Se supp $(\phi) \cap S_\Delta = \emptyset$ então $\langle \Delta, \phi \rangle = 0$;*
2. *Se $S_\Delta = \emptyset$ então $\Delta = 0$;*
3. *Se $\psi \in C^\infty(\Omega)$ e $\psi = 1$ num aberto A tal que $S_\Delta \subset A$ então $\psi\Delta = \Delta$;*
4. *Se S_Δ é um compacto então Δ é de ordem finita. Ou seja, existe uma constante $C < \infty$ e um inteiro não negativo N tal que*

$$|\langle \Delta, \varphi \rangle| \leq C\|\varphi\|_N$$

para toda a aplicação $\varphi \in D(\Omega)$. Além disso, Δ prolonga-se de forma linear e contínua de maneira única sobre $C^\infty(\Omega)$.

Sejam u uma função de domínio $\mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. As funções reais $\tau_x u$ e $\check{u}$ são definidas, para todo o $y \in \mathbb{R}$, por:

$$\begin{aligned} (\tau_x u)(y) &= u(y-x) \\ \check{u}(y) &= u(-y) \end{aligned}$$

A *translação de uma distribuição* é definida por

$$\langle \tau_x u, \varphi \rangle = \langle u, \tau_{-x}\varphi \rangle.$$

Esta definição surge naturalmente do facto de $\displaystyle\int (\tau_x u) v \, d\mu = \int u(\tau_{-x} v) \, d\mu$, par u e v regulares.

4.1 Produto de convolução

Definição 4.3 (produto de convolução)
Sejam u e v funções regulares de domínio $\mathbb{R}$. O produto de convolução $u * v$ é definido por:

$$\begin{aligned} (u*v)(x) &= \int_{\mathbb{R}} u(y)v(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(y)\tau_x\check{v}(y)dy, \end{aligned}$$

quando o integral existe para quase todo o $x \in \mathbb{R}$.

Em seguida, define-se o produto de convolução entre uma distribuição e uma aplicação de $D(\Omega)$.

Definição 4.4
Sejam $u \in D'(\Omega)$, $\varphi \in D(\Omega)$ e $x \in \mathbb{R}$. O produto de convolução entre u e φ define-se por:

$$(u * \varphi)(x) = \langle u, \tau_x \check{\varphi} \rangle.$$

Note-se que, se u é uma função localmente integrável, a definição de produto de convolução entre uma distribuição e uma aplicação coincide com a definição de produto de convolução entre duas aplicações, como seria de esperar.

Seguidamente estende-se a noção de produto de convolução entre uma distribuição e uma aplicação de $D(\Omega)$. Obtem-se assim a definição de produto de convolução entre uma distribuição e uma aplicação de $C^\infty(\Omega)$. Note-se, no entanto, que a distribuição deve ter suporte compacto.

Definição 4.5
Sejam $u \in D'(\Omega)$ de suporte compacto, $\phi \in C^\infty(\Omega)$ e $x \in \mathbb{R}$. O produto de convolução entre u e ϕ define-se por:

$$(u * \phi)(x) = \langle u, \tau_x \check{\phi} \rangle.$$

As proposições que se seguem apresentam algumas propriedades dos produtos de convolução atrás definidos que permitem, nomeadamente, definir o produto de convolução entre duas distribuições.

Proposição 4.6
Sejam $u \in D'(\Omega)$ e $\varphi, \psi \in D(\Omega)$.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \tau_x(u * \varphi) = (\tau_x u) * \varphi = u * (\tau_x \varphi)$;

2. $u * \varphi \in C^\infty$ *e* $D^n(u * \varphi) = (D^n u) * \varphi = u * (D^n \varphi)$, *para todo o* $n \in \mathbb{N}$;

3. $u * (\varphi * \psi) = (u * \varphi) * \psi$.

Proposição 4.7
Sejam $u \in D'(\Omega)$ de suporte compacto, $\phi \in C^{\infty}(\Omega)$ e $\psi \in D(\Omega)$.

1. $\tau_x(u * \phi) = (\tau_x u) * \phi = u * (\tau_x \phi) \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

2. $u * \phi \in C^{\infty}$ *e* $D^n(u * \phi) = (D^n u) * \phi = u * (D^n \phi)$ *para todo o* $n \in \mathbb{N}$;

3. $u * \psi \in D(\Omega)$;

4. $u * (\phi * \psi) = (u * \phi) * \psi = (u * \psi) * \phi$.

Em seguida, apresenta-se, sem demonstração, um teorema de representação das aplicações lineares contínuas de $D(\Omega)$ em $C^{\infty}(\Omega)$.

Teorema 4.8
Seja $u \in D'(\Omega)$. A aplicação L definida, para todo o $\varphi \in D(\Omega)$, por

$$\begin{array}{rccc} L: & D(\Omega) & \longrightarrow & C^{\infty}(\Omega) \\ & \varphi & \longmapsto & u * \varphi \end{array}$$

é uma aplicação linear e contínua que satisfaz

$$\langle \tau_x L, \varphi \rangle = \langle L, \tau_x \varphi \rangle \tag{4.1}$$

onde $\tau_x L(\varphi) = \tau_x u * \varphi$.

Reciprocamente, se L é uma aplicação linear e contínua de $D(\Omega)$ sobre $C^{\infty}(\Omega)$ e satisfaz (4.1) *então existe uma única aplicação $u \in D'(\Omega)$ tal que $\langle L, \varphi \rangle = u * \varphi$ é verificada, para todo o $\varphi \in D(\Omega)$.*

Seja $u, v \in D'(\Omega)$ e suponha-se que pelo menos uma das distribuições tem suporte compacto. Considere-se a aplicação L definida, para todo o $\varphi \in D(\Omega)$, da seguinte forma:

$$\langle L, \varphi \rangle = u * (v * \varphi).$$

A aplicação L está bem definida pois se v tem suporte compacto, então $v * \varphi \in D(\Omega)$ e, portanto, $\langle L, \varphi \rangle \in C^{\infty}(\Omega)$. No caso de u ter suporte compacto ter-se-ia que $v * \varphi \in C^{\infty}(\Omega)$ e, da mesma forma, $\langle L, \varphi \rangle \in C^{\infty}(\Omega)$. Esta aplicação é linear e contínua sobre $C^{\infty}(\Omega)$ e, além disso, $\langle \tau_x L, \varphi \rangle = \langle L, \tau_x \varphi \rangle$. Assim, pela Proposição 4.8, existe uma única distribuição que verifica a igualdade $\langle L, \varphi \rangle = u * \varphi$, para todo o $\varphi \in D(\Omega)$.

Definição 4.9
Sejam $u, v \in D'(\Omega)$ e suponha-se que pelo menos uma das distribuições tem suporte compacto. O produto de convolução entre u e v, $u * v$, é a distribuição caracterizada, para todo o $\varphi \in D(\Omega)$, por:

$$(u * v) * \varphi = \langle L, \varphi \rangle.$$

Neste trabalho, sempre que se referir o produto de convolução entre duas distribuições, considera-se que pelo menos uma delas tem suporte compacto, de modo a que esteja sempre bem definido. Apresentam-se agora algumas propriedades do produto de convolução.

Proposição 4.10
Sejam $u, v, w \in D'(\Omega)$.

1. $u * v = v * u$;
2. $S_{u*v} \subset S_u + S_v$;
3. $(u * v) * w = u * (v * w)$;
4. $D^n(u * v) = (D^n u) * v = u * (D^n v)$ *para todo o inteiro não negativo* n.

A medida de Dirac tem um papel fundamental na resolução de equações de derivadas parciais pelo que a seguinte propriedade merece especial atenção.

Proposição 4.11
Se δ é a medida de Dirac então, para todo o $u \in D'(\Omega)$,

$$\delta * u = u.$$

Prova:
A distribuição δ tem como suporte o conjunto $\{0\}$ que é obviamente compacto, pelo que, independentemente da distribuição $u \in D'(\Omega)$, o produto de

convolução $\delta * u$ está bem definido. Além disso,

$$\begin{aligned}
((u * \delta) * \varphi)(x) &= (u * (\delta * \varphi))(x) \\
&= u(x) * (\langle \delta, \tau_x \check{\varphi} \rangle) \\
&= u(x) * \left(\tau_x \check{\varphi(0)} \right) \\
&= u(x) * (\check{\varphi}(0 - x)) \\
&= (u * \varphi)(x).
\end{aligned}$$

$\square$

4.2 Transformada de Fourier

Definição 4.12 (transformada de Fourier)
A transformada de Fourier de uma função $f \in L^1(\mathbb{R})$ é uma função $\widehat{f}$ definida, para todo o $\xi \in \mathbb{R}$, por:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i\xi y} \, dy$$

A proposição que se segue apresenta algumas propriedades da transformada de Fourier bastante utilizadas na resolução de equações diferenciais.

Proposição 4.13
Sejam f e g duas funções de $L^1(\mathbb{R})$ e $x \in \mathbb{R}$.

1. $\widehat{\tau_x f} = e^{-i\xi x} \widehat{f}$;
2. $\widehat{e^{ix\xi} f} = \tau_x \widehat{f}$;
3. $\widehat{f * g} = \widehat{f}\, \widehat{g}$;
4. *Se* $\lambda > 0$ *e* $g(x) = f(x/\lambda)$ *então* $\widehat{g}(t) = \lambda \widehat{f}(\lambda t)$.

Prova:

1.
$$
\begin{aligned}
\widehat{\tau_x f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \tau_x f(y) e^{-i\xi y} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y-x) e^{-i\xi y} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-i\xi(z+x)} dz \\
&= e^{-i\xi x} \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-i\xi y} dz \\
&= e^{-i\xi x} \widehat{f}(\xi);
\end{aligned}
$$

2.
$$
\begin{aligned}
\widehat{e^{ix} f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} f(y) e^{-i\xi y} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-iy(\xi - x} dy \\
&= \tau_x \widehat{f}(\xi);
\end{aligned}
$$

3.
$$
\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(y) e^{-i\xi y} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y-x) g(x) dx e^{-i\xi y} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y-x) g(x) e^{-i\xi y} dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y-x) g(x) e^{-i\xi y} dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(z) g(x) e^{-i\xi(z+x)} dz dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-i\xi x} dx \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-i\xi z} dz \\
&= \left(\widehat{g}\ \widehat{f} \right)(\xi);
\end{aligned}
$$

4.
$$\begin{aligned} \widehat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-i\xi y}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y/\lambda)e^{-i\xi y}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(z)e^{-i\xi\lambda z}\lambda dz \\ &= \lambda\widehat{f}(\lambda\xi). \end{aligned}$$

□

Uma vez que nem todas as distribuições têm transformada de Fourier vai definir-se um subespaço do espaço das distribuições, espaço das distribuições temperadas, no qual todos os elementos tenham transformada de Fourier. As funções de decrescimento rápido, que seguidamente se definem, desempenham um papel muito importante na construção deste subespaço.

Definição 4.14 (função de decrescimento rápido)
Uma função f diz-se de decrescimento rápido se, para todos os $n, p \in \mathbb{N}_0$, a função $g_{(n,p)}$ definida por

$$g_{(n,p)}(x) = |x|^n D^p f(x)$$

é limitada.

O conjunto de funções $f \in C^\infty(\Omega)$ de decrescimento rápido é denominado por espaço de Schwartz e denotado por $S(\Omega)$.

Para cada $\phi \in S(\Omega)$, define-se a seminorma

$$p_{\alpha\beta} = \sup_{x\in\ \Omega} |x^\alpha D^\beta \phi(x)|,$$

para todo o $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$. A família de seminormas $\{p_{\alpha\beta} \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0\}$ define, como foi dito na Proposição 1.20, uma topologia em $S(\Omega)$. O espaço vectorial topológico definido desta forma é metrizável, completo e localmente convexo, ou seja, é um espaço de Frechet. Além disso, para quaisquer inteiros não negativos α e β e para todo o $\phi \in S(\Omega)$,

$$x^\alpha D^\beta \phi \in S(\Omega).$$

Note-se ainda que uma função teste é, obviamente, uma função de decrescimento rápido, pelo que $D(\Omega) \subset S(\Omega)$.

Como $S(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ a definição de transformada de Fourier em $S(\Omega)$ tem significado. Tem-se ainda que qualquer elemento de $S(\Omega)$ tem transformada de Fourier e a Proposição 4.13 é válida em $S(\Omega)$.

Proposição 4.15

1. *Se $f \in S(\Omega)$ e $P \in \mathbb{R}[x]$ então, para todo $\xi \in \mathbb{R}$,*

$$\widehat{P(D)f}(\xi) = P(i\xi)\widehat{f}(\xi);$$

2. *Sejam $P \in \mathbb{R}[x]$ e $g \in S(\Omega)$. As aplicações*

$$\begin{array}{rcl} \theta_1 : S(\Omega) & \longrightarrow & S(\Omega) \\ f & \longmapsto & P(f) \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} \theta_2 : S(\Omega) & \longrightarrow & S(\Omega) \\ f & \longmapsto & gf \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} \theta_3 : S(\Omega) & \longrightarrow & S(\Omega) \\ f & \longmapsto & Df \end{array}$$

   são lineares e contínuas;

3. *A transformada de Fourier é uma aplicação linear e contínua de $S(\Omega)$ em $S(\Omega)$.*

Em seguida apresenta-se um teorema extremamente útil, conhecido como Teorema da Inversão.

Teorema 4.16 (Inversão)
Seja $g \in S(\Omega)$. Pode escrever-se $g(x)$ como

$$(2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

ou, de outra forma, $\widehat{\widehat{g}}\,(x) = 2\pi\check{g}(x)$.

Prova:
Sejam $\phi, \psi \in S(\Omega)$.

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(x)\psi(x)e^{i\xi x}dx &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\phi(y)dy\psi(x)e^{i\xi x}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix(-\xi+y)}\phi(y)\psi(x)dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix(-\xi+y)}\phi(y)\psi(x)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(y)\int_{\mathbb{R}} e^{-ix(-\xi+y)}\psi(x)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(y)\widehat{\psi}(y-\xi)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(y+\xi)\widehat{\psi}(y)dy.
\end{aligned}
$$

Assim, pelo ponto 4 da Proposição 4.13 tem-se que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(x)\psi(\lambda x)e^{-\lambda x}dx &= \lambda^{-1}\int_{\mathbb{R}} \phi(\xi+y)\widehat{\psi}(y/\lambda)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(\xi+\lambda y)\widehat{\psi}(y)dy.
\end{aligned}
$$

Como os integrais são uniformemente convergentes verificam-se as seguintes equivalências

$$
\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(x)\psi(\lambda x)e^{i\lambda x}dx &= \lim_{\lambda\to 0}\int_{\mathbb{R}} \phi(\xi+\lambda y)\widehat{\psi}(y)dy \\
\Longleftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(x)\psi(0)dx &= \int_{\mathbb{R}} \phi(\xi)\widehat{\psi}(y)dy \\
\Longleftrightarrow \psi(0)\int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(x)dx &= \phi(\xi)\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(y)dy
\end{aligned}
$$

Se se escolher $\psi(x) = e^{-1/2|x|^2}$, então $\psi(0) = 1$ e $\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}dy = 2\pi$ o que conclui a prova. □

Pela Proposição 4.15 e pelo Teorema da Inversão conclui-se que a transformada de Fourier é um homeomorfismo linear de $S(\Omega)$ em $S(\Omega)$.

Assim como a transformada de Fourier, o produto de convolução entre dois elementos de $S(\Omega)$ é também um elemento de $S(\Omega)$, como se enuncia na seguinte proposição.

Proposição 4.17
Se f e g são duas aplicações de $S(\Omega)$ então $f * g \in S(\Omega)$.

A seguinte proposição apresenta a relação da transformada de Fourier com o produto de convolução.

Proposição 4.18
Sejam $f, g \in S(\Omega)$. Verifica-se que

1. $\widehat{f * g} = \widehat{f}\, \widehat{g}$;
2. $\widehat{fg} = 2\pi \widehat{f} * \widehat{g}$.

Prova:

1.
$$
\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} g(x-y) dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi(y+z)} g(z) dz dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y} f(y) dy \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi z} g(z) dz \\
&= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).
\end{aligned}
$$

2. Pelo Teorema da Inversão sabe-se que
$$
f(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \widehat{f}(\xi) d\xi = (2\pi)^{-1} \widehat{\widehat{f}}(-x).
$$
donde $\widehat{\widehat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$. Por outro lado, pela alínea anterior tem-se que
$$
\widehat{\widehat{f} * \widehat{g}}(\xi) = \left(\widehat{\widehat{f}}\ \widehat{\widehat{g}}\right)(\xi).
$$
Assim,
$$
\begin{aligned}
\left(\widehat{f} * \widehat{g}\right)(\xi) &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \widehat{\widehat{f}}(x)\, \widehat{\widehat{g}}(x) dx \\
&= 2\pi \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(-x) g(-x) dx \\
&= 2\pi \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) g(x) dx \\
&= 2\pi \widehat{fg}(\xi).
\end{aligned}
$$

□

Já se tinha referido que não era possível encontrar transformadas de Fourier para todas as distribuições. Seguidamente define-se o conceito de distribuições temperadas e de espaço das distribuições temperadas. Este é um subespaço vectorial topológico do espaço das distribuições, no qual todos os elementos têm transformada de Fourier.

Definição 4.19 (distribuição temperada)
O espaço $S'(\Omega)$ é o espaço dual do espaço $S(\Omega)$. Os elementos de $S'(\Omega)$ designam-se por distribuições temperadas.

Relembre-se que $D(\Omega) \subset S(\Omega)$, pelo que, $S'(\Omega) \subset D'(\Omega)$. Pode-se ainda provar que $D(\Omega)$ é denso em $S(\Omega)$ e, da mesma forma, $S'(\Omega)$ é denso em $D'(\Omega)$.

Definição 4.20 (transformada de Fourier de uma distribuição)
Seja $u \in S'(\Omega)$. A transformada de Fourier de u é definida por

$$\langle \widehat{u}, \phi \rangle = \langle u, \widehat{\phi} \rangle \ , \ \forall \, \phi \in S(\Omega).$$

De notar que para $\phi \in S(\Omega)$, $\widehat{\phi} \in S(\Omega)$. Assim, visto que $u \in S'(\Omega)$, a definição faz sentido.

Uma vez que a transformada de Fourier de uma distribuição é definida através da transformada de Fourier de uma aplicação de $S(\Omega)$, as propriedades que aquela tinha em $S(\Omega)$ ainda são válidas em $S'(\Omega)$.

Exemplo 4.21

1. *Se $P \in \mathbb{R}[x]$, então P é uma distribuição temperada. Em particular o polinómio $P = 1$, é uma distribuição temperada. Relembre-se que a distribuição 1 actua sobre uma função teste φ da seguinte forma:*

$$\langle 1, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \widehat{1}, \varphi \rangle &= \langle 1, \widehat{\varphi} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi} \ d\mu \\ &= 2\pi(2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi} e^{-i\xi 0} \, d\mu \\ &= 2\pi\varphi(0) \\ &= \langle 2\pi\delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Pelo que $\widehat{1} = 2\pi\delta$.

2. *Seja* $\phi \in S(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{\delta}, \phi \rangle &= \langle \delta, \widehat{\phi} \rangle \\
&= \widehat{\phi}(0) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(y) e^{-i0y} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(y) dy \\
&= \langle 1, \phi \rangle.
\end{aligned}$$

Pelo que, $\widehat{\delta} = 1$.

4.3 Os operadores diferenciais clássicos

O estudo das equações de derivadas parciais teve início no séc. XVIII com o trabalho de Euler, D' Alembert, Lagrange e Laplace e a sua principal aplicação era modelar problemas da Física. Ainda hoje, a análise de modelos físicos permanece como um dos principais impulsionadores para o desenvolvimento do estudo das equações de derivadas parciais.

Os três principais exemplos de equações de derivadas parciais de segunda ordem: equação da onda (hiperbólica), equação de Laplace (elíptica) e equação do calor (parabólica) foram inicialmente estudados em finais do séc. XVIII, inícios do séc. XIX.

- A *equação da onda*, de uma dimensão

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

foi introduzida e estudada por D' Alembert em 1752 como modelo para a corda vibrante. O seu trabalho foi continuado por Euler em 1759 e, mais tarde, por D. Bernoulli em 1762 no estudo de ondas acústicas, para as equações de duas e três dimensões:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

onde $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

- A *equação de Laplace*

  $$\Delta u = 0$$

  foi introduzida por Laplace no seu trabalho sobre campos gravitacionais em 1780.

- A *equação do calor*

  $$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

  foi introduzida por Fourier em $1810 - 1822$.

Desde então, diversos matemáticos foram apresentando enúmeros métodos que contribuiram para a evolução das diferentes formas de resolução de equações de derivadas parciais.

Apesar do método do desenvolvimento em séries de potências ter sido utilizado por Euler, D' Alembert e Laplace, entre outros, para obter soluções particulares de equações de derivadas parciais, foi Cauchy, em 1840, quem sistematizou o seu uso, especialmente na resolução de problemas de valor inicial.

Até cerca de 1870, o estudo das equações de derivadas parciais era centrado na procura de soluções de problemas particulares. A procura de provas rigorosas de resultados básicos, mais genéricos, teve início sob a influência de Weierstrass. O seu trabalho foi desenvolvido por Poincaré entre 1890 e 1900.

No seu célebre comunicado ao Congresso Internacional de Matemática em Paris, em 1900, Hilbert apresentou 23 problemas, dois dos quais relacionavam-se com a teoria das equações diferenciais elípticas não lineares. Estes inspiraram matemáticos como B. Levi, H. Lebesgue, G. Fubini, S. Zaremba, L.

Tonelli e R. Courant, que criaram um enorme leque de novas ferramentas matemáticas.

Até 1920 considerava-se que as soluções de equações de derivadas parciais de ordem n seriam funções de classe C^n. Desde então, muitos matemáticos como B. Levi e L. Tonelli, desenvolveram a ideia de solução generalizada. A introdução deste conceito representa uma mudança fulcral na metodologia do estudo das equações de derivadas parciais.

S. Sobolev, em meados dos anos 30, com a introdução dos espaços de Sobolev criou um enquadramento teórico para as soluções generalizadas. Conjuntamente com os espaços L^p, o espaço de Sobolev tornou-se numa das mais utilizadas ferramentas matemáticas do séc XX.

Laurent Schwartz, no seu célebre livro, "La théorie des distributions"[11], apresentou as soluções generalizadas das equações de derivadas parciais de uma nova perspectiva. Ele criou um cálculo baseado na extensão da classe das funções diferenciáveis para uma nova classe de objectos, as distribuições. Esta teoria sistemetizou a clarificou algumas definições de funções generalizadas desenvolvidas por Heaviside, Hadamard, Leray e Sobolev em equações diferenciais parciais e por Wiener, Bochner e Carleman em análise de Fourier.

A teoria das distribuições, entre outras importantes contribuições, veio dar um significado mais transparente à noção de solução fundamental de um operador diferencial.

Definição 4.22 (solução fundamental)
A solução fundamental de $P(D)$ é a distribuição E tal que

$$P(D)E = \delta.$$

Proposição 4.23
Seja E uma solução fundamental de $P(D)$. Se T é uma distribuição com suporte compacto então $S = E * T$ é solução da equação $P(D)S = T$.

Prova:
Seja E a solução fundamental de $P(D)$, T uma distribuição com suporte compacto e $S = E * T$.

$$P(D)S = P(D)(E * T) = (P(D)E) * T = \delta * T = T$$

□

Desta forma, a resolução de equações de derivadas parciais pode passar, pela descoberta das soluções fundamentais dos seus respectivos operadores diferenciais.

Vão ser apresentadas de seguida as soluções fundamentais dos três operadores clássicos.

- O *operador de Laplace* em $\mathbb{R}$ é
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$
A solução fundamental deste operador é a distribuição E que é solução da equação
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E = \delta.$$
Foi já mostrado no Exemplo 3.4 que $\frac{\partial |x|}{\partial x} = 2H(x) - 1$. Assim, $\frac{\partial^2 |x|}{\partial x^2} = 2\delta$.

  Desta forma, facilmente se conclui que
$$E = \frac{|x|}{2}$$
é uma solução fundamental deste operador diferencial.

  Este operador em $\mathbb{R}^n$ tem as seguintes soluções fundamentais E.
$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} log|x| & , n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}|x|^{2-n} & , n > 2 \end{cases}$$
Onde $\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{(1/2)n}}{\Gamma((1/2)n)}$ e Γ é a função Gamma, definida em $]0, +\infty[$.

- O *operador das ondas* em $\mathbb{R}$ é

$$\partial_t^2 - \partial_x^2.$$

A solução fundamental deste operador é a distribuição E definida por

$$E(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , |x| > t \\ 0 & , |x| < t \end{cases}$$

Como se pode verificar de seguida.

$$\left\langle \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) E, \varphi(t,x) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{|x|}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial t^2} dt dx - \int_0^{+\infty} \int_{-t}^{t} \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x^2} dx dt \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} \right]_{|x|}^{+\infty} dx - \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} \right]_{-t}^{t} dt \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(|x|, x) dx - \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,t) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,-t) \right) dt \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(- \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(-x, x) dx - \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,x) dx - \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,t) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,-t) \right) dt \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(-\int_0^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,-x)dx - \int_0^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,x)dx - \int_0^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,t)dt - \int_0^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,-t)dt\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(y,-y) - \frac{\partial\varphi}{\partial x}(y,-y)\right)dy - \int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(y,y) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(y,y)\right)dy\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-\int_0^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,-y)dy - \int_0^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,y)dy\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(-\left[\varphi(y,-y)\right]_0^{+\infty} - \left[\varphi(y,y)\right]_0^{+\infty}\right)\\
&= \tfrac{1}{2}(\varphi(0,0)+\varphi(0,0))\\
&= \varphi(0,0)\\
&= \langle\delta,\varphi(t,x)\rangle.
\end{aligned}$$

- O *operador do calor* em $\mathbb{R}$ é
$$\partial_t - \partial_x^2.$$
Antes de calcular a solução fundamental deste operador, calcula-se a solução fundamental do operador $\partial_x + a$, onde a denota uma constante. Considere-se F a distribuição definida por $F(x) = e^{-ax}H(x)$. Note-se que a função f definida por $f(x) = e^{-ax}$ é de classe C^∞. Então
$$F'(x) = -ae^{-ax}H(x) + e^{-ax}\delta(x).$$
Assim,
$$\begin{aligned}
(\partial t + a)F(x) &= -ae^{-ax}H(x) + e^{-ax}\delta(x)) + ae^{-ax}H(x)\\
&= e^{-ax}\delta(x)\\
&= \delta(x).
\end{aligned}$$
A distribuição F, assim definida, é solução fundamental do operador diferencial $\partial t + a$.

Aplicando a transformada de Fourier sobre x a ambos os membros da equação diferencial

$$(\partial t - \partial x^2)E(t,x) = \delta(t,x)$$

obtém-se, utilizando as propriedades da transformada de Fourier e o teorema da derivação sob o sinal de soma, a equação

$$(\partial t + \xi^2)\widehat{E}(t,\xi) = \delta(t).$$

Esta equação tem a mesma forma da equação anterior. Assim,

$$\widehat{E}(t,\xi) = e^{-\xi^2 t}H(t).$$

Pelo Teorema da Inversão

$$E(t,x) = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2 t}e^{i\xi x}d\xi, \quad \forall\, t > 0.$$

Antes de mais calcula-se a transformada de Fourier da função f definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}$, ou seja,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}e^{-x^2}dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{f}(\xi)}{\partial \xi} &= -i\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}xe^{-x^2}dx \\
&= \frac{i}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\frac{\partial e^{-x^2}}{\partial x}dx \\
&= \frac{i}{2}\left(\left[e^{-i\xi x}e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} -i\xi e^{-i\xi x}e^{-x^2}dx\right) \\
&= -\tfrac{\xi}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}e^{-x^2}dx \\
&= -\tfrac{\xi}{2}\widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Conclui-se que, $\dfrac{\partial \widehat{f}(\xi)}{\partial \xi} = -\dfrac{\xi}{2}\widehat{f}(\xi)$. Logo, resolvendo esta equação diferencial simples, obtém-se

$$\widehat{f}(x) = \widehat{f}(0)e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Considerando ainda que

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

tem-se que

$$\widehat{f}(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Estão reunidas condições para se encontrar $E(t,x)$.

Considere-se $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

$$\begin{aligned}
E(t,x) &= (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2 x} e^{i\xi x} d\xi \\
&= \frac{(2\pi)^{-1}}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{x}{\sqrt{t}}\phi - \phi^2} d\phi \\
&= \frac{(2\pi)^{-1}}{\sqrt{t}} \widehat{f}\left(-\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \\
&= \frac{(2\pi)^{-1}}{\sqrt{t}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4t}} \\
&= (4\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{4t}}.
\end{aligned}$$

Refira-se, apenas por curiosidade, que existem estreitas conexões entre algumas partes da teoria analítica não probabilística e o processo de Markov. Este pode ser descrito como um processo no qual a probabilidade de qualquer evento futuro, condicionada ao presente e a todo o passado, é igual à probabilidade desse evento condicionada apenas ao presente. Este processo é análogo a sistemas mecânicos clássicos onde o conhecimento do estado presente de uma partícula é suficiente para determinar a sua trajectória futura e o conhecimento do passado não contribui com informação adicional.

A equação do calor é uma equação que modela um processo de difusão. O mais simples processo estocástico dito de difusão é o movimento Browniano. A teoria das probabilidades para o movimento Browniano foi apresentada por Albert Einstein em 1906.

Seja x_t uma coordenada de um movimento Browniano de uma partícula num determinado tempo t. A coordenada x_t pode ser vista como uma variável aleatória na qual se considera $x_0 = 0$. O movimento de uma partícula num intervalo de tempo (s, t) é o somatório de um vasto número de pequenos contributos do impacto com muléculas individuais, aproximadamente independentes. Logo, através do Teorema do Limite Central, é de esperar que o incremento $x_s - x_t$ siga uma distribuição normal.

Não se pretende neste trabalho explorar estas conexões. Para obter mais detalhes sugere-se, por exemplo, o livro [6].

Referências Bibliográficas

[1] M. A. Al-Gwaiz. *Theory of distributions*, Marcel Dekker, New York, 1992.

[2] H. Brezis, F. Browder. Partial Differential Equations in the 20th century, *Advances in Mathematics* **135**, Academic Press, 1998, 76-144.

[3] D. Cohn. *Measure theory*, Birkhäuser, Boston, 1980.

[4] G. Folland. *Introduction to Partial Diferential Equations* (Second Edition), Princeton University Press, 1995.

[5] A. Gracián, Las Medallas Fields, *La Gaceta de la RSME, vol 6.1*, 2003, 177-2001.

[6] J. Lamperti. *Probability, A survey of the mathematical theory* (Second Edition), John Wiley & Sons Inc., 1996.

[7] S. Lang. *Real and Funcional Analysis* (Third Edition), Springer-Verlag, New York, 1993.

[8] E.L. Lima. *Curso de Análise, volume 1, volume 2*, Editora Lua Nova Ltda, 1987, 1989.

[9] R. Walter. *Funcional Analysis* (Second Edition), McGraw-Hill, 1991.

[10] F. Oliveira. Tópicos de Ánálise, Manuscrito, Universidade do Minho, 2004.

[11] L. Schwartz. *Théorie des distributions I, II.* Hermann, Paris, 1950, 1951.

[12] L. Schwartz. *Analyse I: Théorie des ensembles et topologie*. Hermann, Paris, 1991.

[13] L. Schwartz. *Analyse II: Calcul différenciel et équations différencielles.* Hermann, Paris, 1992.

[14] L. Schwartz. *Analyse III: Calcul intégral*. Hermann, Paris, 1993.

[15] L. Schwartz. *Un mathématicien aux prises avec le siècle*. Ed Odile Jacob, Paris, 1997.

[16] G. Ziemer. *Modern real analysis*, PWS Publish Company, 1995.

Índice Remissivo

σ-álgebra, 34

aderência, 4

base local, 6
bola, 10

cobertura, 4
conjunto
    aberto, 3
    absorvente, 7
    compacto, 4
    convexo, 7
    equilibrado, 7
    fechado, 3
    limitado, 7
    simétrico, 12
continuidade, 4
    pontual, 4

distribuição, 33
    associada, 36
    derivada, 41
    temperada, 59

espaço
    completo, 11
    de Hausdorff, 11
    de Heine-Borel, 11
    de Schwartz, 54
    localmente compacto, 7
    localmente convexo, 7
    localmente limitado, 7
    metrizável, 11
    normável, 11
    vectorial topológico, 5
    métrico, 10
    mensurável, 34
    mensurado, 35
    topológico, 3

família separável de seminormas, 20
função
    de decrescimento rápido, 54
    de Dirac, 43
    de Heaviside, 43
    teste, 31
    de Minkowski, 18
    integrável, 35
    localmente integrável, 35, 36
    mensurável, 35
    simples, 35

integral
    de uma função, 35
    de uma função simples, 35
interior, 3

métrica, 10
induzida por uma norma, 10
medida, 34
finita nos compactos, 40

norma, 10

operador
das ondas, 64
de Laplace, 63
do calor, 65

parte finita de $\frac{1}{x^2}$, 38
produto de convolução, 48

seminorma, 20
solução fundamental, 62
subcobertura, 4
sucessão
convergente, 11
de Cauchy, 11
suporte, 28
de uma distribuição, 47

topologia, 3
produto, 5
induzida, 28
induzida por uma métrica, 10
transformada de Fourier, 52
de uma distribuição, 59
translação de uma distribuição, 48

valor principal de $\frac{1}{x}$, 37
vizinhança, 3
simétrica, 12